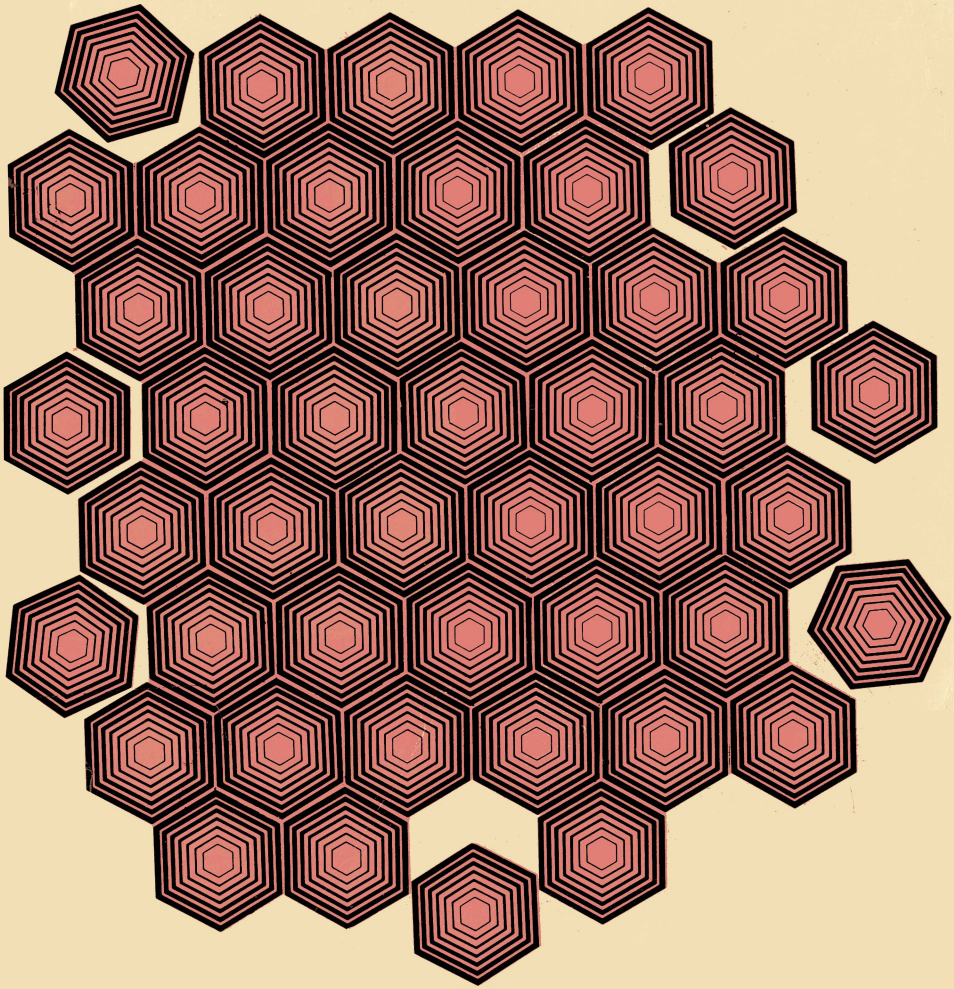
G. Eymard et C. Debouzy

L'ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Corrigée et commentée

Baccalauréats C et E



VUIBERT

L'ÉPREUVE DE PHYSIQUE

(BACCALAURÉATS C et E)

DANS LA MÊME SÉRIE :

L'épreuve de biologie (Baccalauréats D, D' et C), par P. VINCENT. – vol. 13,5 × 21 cm de 224 pages.

L'épreuve de mathématiques (Baccalauréats C et E), par J. TRIGNAN. vol. 13.5 × 21 cm de 192 pages.

L'épreuve de philosophie (Baccalauréats toutes séries), par Cl. ROËLS. vol. 13,5 × 21 cm de 216 pages.

L'épreuve d'économie (Baccalauréats B et D'), par G. ATGÉ et S. LECLERCQ. vol. 13,5 × 21 cm de 192 pages.

L'épreuve de gestion (Baccalauréats G2 et G3), par J. ORSONI et P. FROCRAIN. – vol. 13,5 × 21 cm de 300 pages.

L'épreuve de physique (Baccalauréats D et D'), par G. EYMARD et Cl. DEBOUZY. – vol. 13,5 × 21 cm de 208 pages.

EN PRÉPARATION :

L'épreuve d'histoire et géographie (Baccalauréats toutes séries), par R. DUBREUIL et P. WAGRET. – vol. 13,5 × 21 cm de 350 pages.

L'épreuve de mathématiques (Baccalauréats D), par J. et A. TRIGNAN. – vol. 13,5 × 21 cm.

Georges EYMARD Claude DEBOUZY

L'ÉPREUVE DE PHYSIQUE

(BACCALAURÉATS C ET E)

PARIS
LIBRAIRIE VUIBERT
63, BOULEVARD SAINT-GERMAIN
1978

DIFFUSEURS VUIBERT

BELGIQUE : ÉDITIONS ET DIFFUSION,
16, rue de Chambéry, 1040 BRUXELLES.

CANADA : PRESSES DE L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC,
CP 250 - Station N, MONTRÉAL H2X 3M4.

MAROC : SMER-LIVRE-SERVICE,
10, avenue Allal Ben Abdallah, RABAT.

SUISSE : SPES,
39, route d'Oron, 1002 LAUSANNE.

ISBN : 2-7117-3351-3

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article 40).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code Pénal.

© Librairie Vuibert, 1978.

Table des matières

A. — Mécanique

1. Application du théorème du mouvement du centre de gravité : voiture et caravane sur un plan incliné 23
2. Pendule de torsion; mouvement oscillatoire d'un dipôle dans un champ électrique uniforme..... 29
3. Mouvement circulaire uniformément varié d'un disque autour d'un axe; pendule pesant; pendule de torsion 35
4. Oscillations d'une masse suspendue à un ressort; masse suspendue à un ressort et entraînée par un wagon; deux masses liées par un ressort glissant sur un plan incliné, entraînées par un fil passant sur une poulie et supportant un poids 42
5. Skieur glissant sans frottement sur une pente verglacée, puis avec frottement sur une pente enneigée; décollage du skieur et trajectoire ultérieure de son centre de gravité 49
6. Oscillations d'une masse suspendue à un ressort; pendule conique; machine d'Atwood dont les poids sont liés au fil par l'intermédiaire de deux ressorts; système oscillant composé d'un poids glissant sur un plan incliné, entraîné par un fil passant sur une poulie et supportant un second poids rappelé dans sa position d'équilibre par un ressort..... 55
7. Pendule simple; choc élastique de deux billes; pendule conique; bille effectuant un mouvement circulaire uniforme autour d'un axe vertical auquel elle est liée par deux fils; calcul des tensions des fils . 62
8. Treuil de moment d'inertie variable entraîné par un poids; vitesse angulaire maximale d'un pendule; choc mou d'une bille immobilisant le pendule; pendule pesant soumis à un second couple de rappel produit par un ressort spiral : calcul de la période des oscillations . 68
9. Chute des corps; rencontre de deux billes lâchées à des instants différents sur la même verticale; choc parfaitement élastique des deux billes; pendule pesant formé d'une tige portant les deux billes précédentes : calcul de la période, et des composantes radiale et transversale de la réaction de l'axe 75
10. Bille glissant sans rouler, puis roulant sans glisser sur un plan incliné; énergie potentielle d'un ressort comprimé; bille roulant sans glisser

lancée par le ressort précédent sur un plateau horizontal; choc élastique de deux billes glissant sans rouler dans la même direction 81

11. Moment d'inertie d'un système composé de trois cylindres coaxiaux; oscillations du système sous l'effet du couple de torsion produit par un fil de direction confondue avec l'axe de révolution du système; pendule pesant : oscillations du système autour d'un axe horizontal parallèle à son axe de révolution; rotation libre du système autour de son axe : variation de vitesse angulaire consécutive à une variation du moment d'inertie; deux treuils de rayons inégaux, coaxiaux, entraînés par des poids 87

12. Machine d'Atwood; mesure de l'accélération à l'aide de deux horloges électriques; vitesses angulaire et linéaire d'une masse ayant décrit une trajectoire de rayon de courbure variable 94

B. — Vibrations mécaniques

13. Mouvement de l'extrémité d'une lame vibrante; ondes progressives dans une corde liée à cette lame; observation stroboscopique d'une onde progressive au ralenti; corde parcourue par un courant alternatif et soumise à l'action d'un champ magnétique uniforme; ondes stationnaires présentant d'abord un seul, puis deux fuseaux ... 101

14. Ondes progressives dans une corde verticale; ondes stationnaires dans une corde verticale placée dans un ascenseur, d'abord au repos, puis en mouvement accéléré : modification de la longueur de la corde pour conserver quatre fuseaux 108

15. Propagation d'une onde à la surface de l'eau; observation stroboscopique : condition d'immobilité apparente; mouvement d'un point de la surface; représentation de la surface de l'eau à un certain instant; interférences produites à la surface de l'eau par deux sources synchrones et en phase, puis synchrones et présentant un déphasage de $\frac{\pi}{4}$; équations horaires des mouvements de divers points situés sur la droite définie par les deux sources 114

16. Célérité de la propagation du son dans un gaz : ondes progressives sonores dans un tuyau; représentation des ondes progressives de pression; étude de ces ondes à l'aide d'un microphone commandant un oscilloscope; influence de la densité du gaz; ondes stationnaires dans le tuyau; observation des nœuds et ventres de pression à l'aide du microphone et de l'oscilloscope 123

C. — Électricité

17. Ondes stationnaires produites dans une corde par un vibreur; observation stroboscopique, aspects observés à diverses fréquences d'éclairement; inductance et résistance de la bobine du vibreur; intensité et tension aux bornes instantanées, capacité assurant la résonance 131

18. Étude d'analogie électromécanique : équation liant les valeurs instantanées de la tension aux bornes, de l'intensité et sa dérivée par rapport au temps et de la charge du condensateur dans un circuit R,L,C; variation du déphasage de i sur u et de l'impédance en fonction de la pulsation; question analogue pour la vibration d'une plaque soumise à une force de rappel élastique, au frottement et à une force excitatrice périodique 140

19. Impédance d'un circuit R,L; capacité assurant la résonance; circuit R,L,C : coefficient de surtension; variation de l'intensité efficace en fonction de la capacité pour une fréquence constante; acuité de la résonance 152

20. Circuit R,L,C : impédances d'une bobine et d'un condensateur en série, puis du circuit, déduites des mesures des valeurs efficaces des tensions et de l'intensité; calcul du déphasage; résonance obtenue en faisant varier la fréquence; puissance moyenne consommée à la résonance; fréquences pour lesquelles cette puissance se réduit au quart de sa valeur; dispositif permettant de supprimer une alternance sur deux; intensité efficace du courant redressé ainsi obtenu 158

21. Circuit R,L,C : valeurs de C produisant entre i et u un déphasage de $\frac{\pi}{4}$; variation de la puissance consommée dans le circuit en fonction de sa résistance; bande passante; propriétés des limites de la bande passante 166

22. Circuit R,C : deux impédances R,C en série; condition pour que $Z = Z' + Z''$; bobine assurant la résonance; valeurs de L pour lesquelles le facteur de puissance est 0,707; capacité, résistance et bobine en parallèle : expressions des intensités instantanées et de l'intensité totale 172

23. Deux bobines identiques montées en série, l'une avec une inductance, l'autre avec une capacité afin que les courants soient en quadrature lorsque les deux circuits sont montés en parallèle; production d'un champ tournant 179

D. — Actions des champs sur les particules

24. Étude de l'oscilloscope électronique; déplacement du spot en fonction de la tension; sensibilité; montage d'une résistance et d'une bobine en série : calcul de la résistance et de l'inductance à partir des tensions efficaces aux bornes; études des tensions instantanées à l'aide de l'oscilloscope bi-faisceau; courbes observées sur l'écran .. 187

25. Accélération des protons par un champ électrique; pinceau de protons dévié par le champ électrique établi entre deux grilles : réfraction du faisceau; action d'un champ magnétique uniforme sur le faisceau; trajectoire; points d'impact pour un mélange de protons et de deutons 197

26. Choc élastique d'une particule alpha et d'un proton; déviation d'un faisceau de particules alpha par un champ électrique, puis par un champ magnétique; séparation des isotopes de l'hélium 203

E. — Nature ondulatoire et corpusculaire de la lumière

27. Interférences obtenues avec des fentes d'Young; mesure de la longueur d'onde; dispositif plongé dans un milieu d'indice n : calcul de n; lame mince placée devant une fente : déplacement de la frange centrale; interférences en lumière blanche, radiations manquantes; spectre cannelé 215

28. Fentes d'Young; mesure de la longueur d'onde; épaisseur d'une lame placée devant l'une des fentes; déplacement de la source pour ramener la frange centrale dans sa position initiale; coïncidences obtenues avec deux lumières de couleurs différentes; éclairage en lumière blanche : longueurs d'ondes des radiations manquantes; polarisation de la lumière : rotation de l'analyseur pour réduire de moitié l'intensité de la lumière 220

29. Cellule photo-électrique : nombre d'électrons arrachés à la cathode par seconde; accélérations des électrons par le champ électrique; potentiel d'arrêt; seuil photo-électrique; cellule éclairée par une lumière polarisée : courant débité par la cellule en fonction de l'angle dont on fait tourner l'analyseur : mesure de la longueur d'onde de la lumière par le dispositif des fentes d'Young 226

30. Dispositif interférentiel des miroirs de Fresnel; interfrange; variation de l'éclairement de l'écran en fonction de la distance à la frange centrale; superposition de deux systèmes de franges; cellule photo-électrique : seuil; énergie maximale des photo-électrons; potentiel d'arrêt 233

F. — Molécules, atomes et noyaux

31. Énergie d'un rotateur en fonction de la fréquence de rotation; application à la molécule HCl excitée par une radiation électromagnétique; énergie d'un oscillateur harmonique; application à la molécule HCl : calcul de l'amplitude des oscillations 245

32. Atome de Bohr : énergie potentielle coulombienne; calcul des rayons des orbites circulaires permises; niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène; radiation émise lors d'une transition 251

Avant-propos

Ce fascicule contient 32 problèmes proposés dans diverses académies entre les années 1972 et 1976, choisis de manière à couvrir aussi complètement que possible l'étendue du programme de sciences physiques des classes terminales C et E.

Chaque problème est précédé d'une courte note indiquant les connaissances nécessaires pour le résoudre. Les problèmes sont classés dans un ordre tel que les connaissances nécessaires s'accroissent progressivement, conformément à la progression généralement suivie dans les classes au cours de l'année scolaire.

Cependant, les problèmes portant sur les interférences lumineuses ont été reportés en fin de volume, dans un chapitre consacré à la double nature ondulatoire et corpusculaire de la lumière, alors que, dans les programmes, cette question suit immédiatement les interférences mécaniques (vibrations et acoustique). Ce déplacement se justifie par le grand nombre de problèmes comportant deux parties, l'une portant sur les interférences, l'autre sur l'effet photo-électrique : leurs auteurs ont certainement voulu porter l'accent sur la double nature du rayonnement électro-magnétique. Lors d'une première lecture, effectuée après l'étude des interférences lumineuses, il sera possible de ne traiter que les parties correspondantes des problèmes du chapitre E.

L'épreuve écrite de sciences physiques dans les séries scientifiques du baccalauréat

L'épreuve écrite de sciences physiques dans les séries C, D ou E du baccalauréat comporte ordinairement deux questions de cours notées chacune sur 4 points et un problème noté sur 12 points. Cette épreuve, affectée du coefficient 5 en série C, 4 en séries D et E, présente une importance majeure et le candidat soucieux d'obtenir un bon résultat à l'examen doit s'attacher à utiliser pleinement le temps dont il dispose afin de s'assurer la note maximale correspondant à ses connaissances. Nous examinerons la méthode à suivre pour obtenir ce résultat, d'abord lors de la rédaction des questions de cours, puis du problème. Préalablement, nous nous interrogerons sur la répartition la plus favorable du temps total, 3 heures, imparti à l'épreuve.

Répartition du temps accordé à l'épreuve. – Cette répartition dépend des connaissances du candidat, qui présentent parfois certaines lacunes, et de l'ensemble des questions posées. Il convient donc, d'abord, de lire entièrement, et posément, le sujet afin de distinguer les parties bien connues, qui seront traitées par priorité, des parties moins bien acquises qui seront rédigées en second lieu.

Tel candidat, qui se sait mal à l'aise dans la formulation mathématique d'une question de Dynamique ou d'Electricité, mais qui connaît très bien son cours, gagne à consacrer la moitié du temps aux questions de cours, quitte à ne pas terminer le problème. Tel autre, qui a négligé de fréquenter assidûment son traité de chimie, s'avantage en résolvant le problème dans un premier temps et en renvoyant à la fin de l'épreuve la rédaction d'une question qu'il connaît mal.

Pour un candidat sérieux, qui a bien étudié l'ensemble de son programme et qui pense savoir traiter toutes les questions proposées, on peut admettre qu'il suffit de 45 minutes à 1 heure pour traiter les deux questions de cours, le reste du temps étant consacré au problème.

La question de cours. – *La question de cours est une composition française sur un sujet de physique ou de chimie.* Son rédacteur doit donc s'attacher à suivre les règles de la dissertation, telles qu'elles ont été exposées tant par le professeur de lettres que par celui de philosophie.

Rappelons cependant quelques nécessités essentielles :

La question de cours doit être *lisible* : le candidat doit s'efforcer de bien former ses lettres et de soigner sa ponctuation afin d'être aisément compris par son correcteur. Il convient aussi d'éviter l'usage d'une encre trop pâle, le meilleur contraste étant obtenu, sur du papier blanc, par le noir ou le bleu foncé.

La question de cours doit être *écrite en français*, d'une expression simple, sans recherche déplacée, mais correcte et d'une orthographe décente. Les cir-

culaires ministérielles d'organisation du baccalauréat invitent « chaque correcteur à limiter à deux points sur vingt au maximum les pénalités qu'il serait amené à infliger pour ce motif, sauf pour l'épreuve de français ».

Une pénalité de 2 points, soit 8 ou 10 points aux coefficients 4 ou 5, peut signifier l'échec et le redoublement de la classe terminale : mieux vaut donc se donner la peine d'écrire correctement.

Avant de se lancer dans la rédaction d'une question de cours, il faut *lire attentivement le sujet*, en *analyser tous les termes*, en *reconnaître les limites*. Il est inutile, en particulier, de traiter ce qui est expressément déclaré hors du sujet, puisqu'il ne peut être attribué aucun point à de telles digressions, si longues et documentées soient-elles.

Exemples :

« Interférences lumineuses.

1° Décrire un dispositif, au choix.

2° Phénomènes observés, interprétation. (On ne demande pas de calculer l'interfrange.) » (NICE, Séries C et E, juin 1970.)

Il serait inutile ici de parler des miroirs de Fresnel après avoir traité le dispositif des fentes de Young puisqu'il est demandé de décrire UN dispositif. *A fortiori,* le candidat perdrait entièrement son temps s'il tenait à placer, à tout prix, son calcul de l'interfrange...

« Étude théorique du pendule pesant. Cas limite du pendule simple. (On ne traitera pas les applications du pendule.) » (ABIDJAN, séries C et E, juin 1970.)

Ce serait perdre son temps que décrire ici la mesure de g ou bien la régulation des horloges...

Ayant lu et délimité le sujet, il faut maintenant *rassembler ses connaissances* sur une feuille de brouillon, et *rédiger un plan,* qui ne coïncide pas nécessairement avec celui du manuel ou de l'exposé du professeur.

Ce plan fait apparaître *autant de paragraphes que d'idées développées,* comme dans une dissertation littéraire ou philosophique. (Nous retrouvons ici l'universalité des règles de la composition.) Par contre, il est permis, et même recommandé, de sous-titrer les paragraphes (ce qui n'est pas d'usage en lettres), afin de mieux structurer l'exposé.

En même temps que le plan, il convient de rédiger au brouillon l'*introduction* qui limite le sujet et annonce les points de l'exposé, et la *conclusion* qui permet de dégager les idées essentielles de l'étude.

Il reste maintenant à rédiger, *directement sur la copie,* le texte de la question de cours. En effet, une rédaction préalable au brouillon représenterait une perte de temps qui ne serait certainement compensée par aucun gain notable sur la note.

Cette rédaction directement effectuée au propre conduit parfois le candidat à barrer une partie de son exposé pour la reprendre sous une autre forme. Ces corrections effectuées sur la copie sont sans inconvénient, pourvu qu'elles soient faites *proprement* et *franchement,* c'est-à-dire pourvu qu'il ne subsiste pas de doute sur la pensée du rédacteur.

Les descriptions d'appareils mécaniques ou électriques, des montages de chimie, de structures de molécules, etc. doivent s'accompagner de *figures,* dessinées à main levée, mais claires et de dimensions suffisantes pour être lues commodément. Les figures sont numérotées et leurs parties sont désignées par

des lettres : numéros et lettres sont rappelés dans le texte lui-même afin qu'il ne subsiste aucune ambiguïté pour le lecteur.

Certains sujets demandent, explicitement ou non, d'effectuer une comparaison. Dans ce cas, beaucoup de candidats n'obtiennent que des notes médiocres bien qu'ils possèdent les connaissances nécessaires, car leurs copies présentent des exposés successifs et sans liens entre eux, de telle manière que la comparaison demandée n'est pas faite.

Exemple : « Comparer les propriétés des alcools primaires, secondaires et tertiaires du point de vue de l'oxydation et de l'estérification. » (REIMS, séries C et E, juin 1970.)

Il serait très maladroit, ici, de traiter d'abord le cas des alcools primaires (oxydation et estérification), puis des alcools secondaires, puis des tertiaires.

Un meilleur plan consiste à traiter d'abord de l'*oxydation des trois classes d'alcools* en marquant les ressemblances (on obtient toujours finalement un ou plusieurs acides) et les différences (le passage à l'acide s'effectue directement dans le cas des alcools tertiaires, par l'intermédiaire de l'aldéhyde ou de la cétone pour les primaires et les secondaires ; il s'effectue sans rupture de la chaîne carbonée pour les primaires, avec rupture de cette chaîne pour les autres, et conduit à un mélange d'acides, etc.).

Passant ensuite à l'*estérification*, l'on insistera sur la difficulté croissante de cette réaction et sur la diminution de la limite d'estérification lorsque l'on passe de l'alcool primaire au secondaire, puis au tertiaire...

Une conclusion permettra de relier les ressemblances à l'existence d'un radical hydroxyde OH substitué à un atome d'hydrogène dans un carbure, et les différences à la place occupée par cet hydroxyde dans la molécule.

Le problème. – Il faut d'abord lire entièrement l'énoncé, avec le plus grand soin, c'est-à-dire la plume à la main, afin de nôter au passage, sur une feuille de brouillon, toutes les indications utiles :

– valeur de g (9,81 ; 9,8 voire parfois 10 $m.s^{-2}$) ;

– valeur de π et de π^2, cette dernière étant souvent identifiée à 10 ou à g, etc.

a) Cette feuille de brouillon, conservée jusqu'à la fin de la recherche du problème, permet avantageusement de *relever les notations* (lettres représentatives des grandeurs), et leurs *valeurs numériques*, qui y sont inscrites d'abord comme dans l'énoncé, et éventuellement converties dans le Système International (SI) si elles ont été données dans un autre système.

Exemple : Pour un condensateur, on note les données suivantes :

Écartement des armatures : $e = 0{,}5$ mm $= 5.10^{-4}$ m ;

Capacité : $C = 0{,}5\ \mu F = 5.10^{-7}$ F.

b) Cette feuille de brouillon, que l'on peut désigner comme « *Feuille des données* », permet de relever les résultats intermédiaires obtenus lors de la résolution des premières questions, et d'avoir ces résultats sous la main pour les questions suivantes sans devoir les rechercher dans les pages de copie déjà rédigées.

La lecture entière de l'énoncé permet aussi de reconnaître les *questions ou parties indépendantes*, afin de traiter en premier celles qui ne semblent pas poser de grandes difficultés.

Le numérotage des questions doit être reproduit sur la copie avec le plus grand soin. On écrira donc, très lisiblement, par exemple :

- au milieu d'une ligne : « Partie A »
- dans la marge : 1° *a*) .....
  1° *b*) .....
  2° *a*) ....., etc.

Le numérotage très soigné des questions traitées devient absolument essentiel lorsque, dans un problème contenant des parties indépendantes, on traite les questions dans un ordre différent de celui de l'énoncé.

Les notations indiquées dans l'énoncé (lettres représentant les grandeurs) *sont toujours impératives.* Le candidat n'a pas le droit de les modifier.

Si l'énoncé ne précise pas de notations, et donne seulement des valeurs numériques, *il convient de choisir des notations usuelles* (*i* pour une intensité instantanée, U_m pour une tension maximale, F pour une force, W pour un travail,...) Les notations choisies seront inscrites sur la feuille des données : cette précaution permet d'éviter le double emploi d'une même lettre, utilisée au début du problème pour représenter une certaine grandeur, et reprise dans la dernière question avec une signification différente.

Le problème de physique doit être rédigé : Beaucoup de candidats perdent des points en négligeant de procéder à cette rédaction, et en réduisant leur texte à une suite de formules et de calculs algébriques. Le phénomène physique étudié doit être *décrit,* le plus souvent à l'aide d'une figure dessinée à main levée, mais claire et lisible, accompagnée d'un commentaire convenable. Les lois et théorèmes utilisés dans la solution doivent être annoncés; par exemple, si l'on étudie le mouvement d'un treuil, on écrira

« Appliquons le théorème de l'accélération angulaire au cylindre de moment d'inertie $J = \frac{1}{2} MR^2$, tournant autour de l'axe OO′ sous l'effet de la tension F du fil AB; l'accélération angulaire θ'' vérifie la relation

$$J\theta'' = RF. \quad (1)$$

(Bien entendu, le texte donné ci-dessus en exemple doit s'accompagner d'une figure indiquant sans ambiguïté l'axe OO′ et le fil AB.)

Le numérotage entre parenthèses des équations permet, par la suite, d'indiquer commodément les combinaisons où elles interviennent.

L'essentiel. dans un problème de physique. est d'établir un raisonnement rigoureux par l'application successive des lois physiques s'appliquant au problème posé. Le raisonnement mathématique se réduit ici à un outil nécessaire, parfois indispensable, mais qui ne doit jamais prendre le pas sur le raisonnement physique.

Par exemple, ayant écrit un système d'équations du premier degré à deux inconnues, il est inutile de rédiger sur la copie le détail de la résolution du système; il suffit d'indiquer qu'en appliquant la méthode d'addition (ou de substitution), et toutes réductions faites, l'on obtient les racines X = ... et Y = ... Par contre, il faudra discuter la *validité physique des résultats obtenus* (une fréquence ne peut pas être négative; le signe d'une intensité ou d'une vitesse indique un sens de courant ou un sens de déplacement qui doivent être interprétés, etc.).

Les résultats obtenus à chaque question doivent être mis en évidence en encadrant, proprement mais à main levée, les expressions littérales et numériques.

Les résultats numériques doivent être donnés avec leur unité, à moins qu'il s'agisse simplement du rapport de deux grandeurs de même nature, qui se réduit à un nombre sans dimension.

Nous donnerons maintenant quelques conseils pratiques qui permettront d'éviter les erreurs, de contrôler les résultats et, parfois, de simplifier les calculs.

Homogénéité des grandeurs physiques. – *Deux expressions faisant intervenir des grandeurs physiques ne peuvent être égales que si elles sont de même dimension* (ce qui permet de les exprimer dans la même unité).

a) Dimension d'une grandeur physique : Les unités fondamentales du système international (SI ou MKSA) sont le mètre, le kilogramme, la seconde et l'ampère (auxquelles il faut ajouter le kelvin (K) pour les températures et la candéla, unité fondamentale de photométrie, qui ne se rencontre jamais au niveau du baccalauréat).

Les grandeurs fondamentales sont donc la longueur (L), la masse (M), le temps (T), l'intensité électrique (I) et la température (θ).

Montrons d'abord que la dimension de toute grandeur physique peut s'exprimer par un monôme constitué à partir des grandeurs fondamentales :

Grandeur	Relation de définition	Unité	Dimension
aire	longueur × longueur	m^2	L^2
volume	longueur × longueur × longueur :	m^3	L^3
masse volumique	$\frac{\text{masse}}{\text{volume}}$	$kg.m^{-3}$	$M.L^{-3}$
masse superficielle	$\frac{\text{masse}}{\text{surface}}$	$kg.m^{-2}$	$M.L^{-2}$
masse linéique	$\frac{\text{masse}}{\text{longueur}}$	$kg.m^{-1}$	$M.L^{-1}$
vitesse	$\frac{\text{longueur}}{\text{temps}}$	$m.s^{-1}$	$L.T^{-1}$
accélération	$\frac{\text{vitesse}}{\text{temps}}$	$m.s^{-2}$	$L.T^{-2}$
force	masse × accélération	N	$M.L.T^{-2}$
travail	force × longueur (déplacement)	J	$M.L^2.T^{-2}$
énergie cinétique	masse × (vitesse)^2 (même dimension que le travail)	J	$M.L^2.T^{-2}$
puissance	$\frac{\text{travail}}{\text{temps}}$	W	$M.L^2.T^{-3}$
coefficient de raideur	$\frac{\text{force}}{\text{longueur}}$	$N.m^{-1}$	$M.T^{-2}$

Grandeur	Relation de définition	Unité	Dimension
angle	$\frac{\text{longueur (arc)}}{\text{longueur (rayon)}}$	rd	1 (sans dimension)
sinus	$\frac{\text{longueur (côté opposé)}}{\text{longueur (hypothénuse)}}$		1 (sans dim.)
cosinus	$\frac{\text{longueur (côté adjacent)}}{\text{longueur (hypothénuse)}}$		1 (sans dim.)
tangente	$\frac{\text{longueur (côté opposé)}}{\text{longueur (côté adjacent)}}$		1 (sans dim.)
moment	force × longueur (bras de levier)	m.N	$M.L^2.T^{-2}$
moment d'inertie	masse × (longueur)^2	$kg.m^2$	$M.L^2$
vitesse angulaire	$\frac{\text{angle}}{\text{temps}}$	$rd.s^{-1}$	$1/T = T^{-1}$
accélération angulaire	$\frac{\text{vitesse angulaire}}{\text{temps}}$	$rd.s^{-2}$	T^{-2}
travail énergie cinétique	moment × angle moment d'inertie × (vitesse angulaire)^2	J J	$M.L^2.T^{-2}$ $M.L^2.T^{-2}$
tension électrique	$U = \frac{P}{I} = \frac{\text{puissance}}{\text{intensité}}$	V	$M.L^2.T^{-3}.I^{-1}$
résistance	$R = \frac{U}{I} = \frac{\text{tension}}{\text{intensité}}$	Ω	$M.L^2.T^{-3}.I^{-2}$
impédance	$Z = \frac{U}{I} = \frac{\text{tension}}{\text{intensité}}$	Ω	$M.L^2.T^{-3}.I^{-2}$
capacité	$C = \frac{1}{Z\omega} = (\text{impédance} \times \text{vitesse angulaire})^{-1}$	F	$M^{-1}.L^{-2}.T^4.I^2$
inductance	$L = \frac{Z}{\omega} = \frac{\text{impédance}}{\text{vitesse angulaire}}$	H	$M.L^2.T^{-2}.I^{-2}$

Vérifions l'homogénéité de quelques formules usuelles :

— *Période du pendule pesant :* $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{Mga}}$: le premier membre est un temps T. Au second membre, le terme 2π est sans dimension ; pour le radical, nous avons

$$\sqrt{\frac{J}{Mga}} = \sqrt{\frac{M.L^2}{M.L.\,T^{-2}.L}} = T.$$

— *Fréquences d'une corde vibrante :* $N = \frac{k}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$: Le premier membre est une fréquence, donc l'inverse d'un temps (T^{-1}).

Au second membre, k (nombre des fuseaux) et 2 sont des nombres sans dimensions. Par ailleurs, L est une longueur, F une force et μ une masse linéique :

$$\frac{1}{L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} = \frac{1}{L}\cdot\sqrt{\frac{MLT^{-2}}{ML^{-1}}} = \sqrt{T^{-2}} = T^{-1}.$$

— *Formule de Thomson :* $T = 2\pi\sqrt{LC}$. Le premier membre est un temps T.

Au second membre, le terme 2π est sans dimension; pour le radical, il vient

$$\sqrt{LC} = \sqrt{M.L^2.T^{-2}.I^{-2}.M^{-1}.L^{-2}.T^4.I^2} = \sqrt{T^2} = T.$$

Lorsque la résolution d'une question conduit à l'établissement d'une formule littérale compliquée, il est prudent de vérifier l'homogénéité de l'expression. *Si l'homogénéité n'est pas vérifiée. la formule obtenue est fausse. et il faut reprendre le raisonnement.*

Exemple : L'accélération d'un système est donnée par l'expression

$$\gamma = \frac{gr^2(M_1 \sin\alpha - M_2)}{r^2(M_1 + M_2) + J},$$

où g est l'accélération de la chute des corps, r une longueur, M_1 et M_2 sont deux masses, et J un moment d'inertie.

Au premier membre, γ est une accélération de dimension LT^{-2}.

Au second membre : $\sin\alpha$ est sans dimension. Donc $M_1 \sin\alpha - M_2$ est une masse M, ainsi que $M_1 + M_2$. Nous avons

$$\frac{gr^2(M_1 \sin\alpha - M_2)}{r^2(M_1 + M_2) + J} = \frac{LT^{-2}.L^2.M}{L^2M + ML^2} = \frac{LT^{-2}}{2},$$

2 étant sans dimension, nous retrouvons bien la dimension d'une accélération, et la formule obtenue peut être exacte.

Formule d'approximation. — Lorsque le nombre ε est petit devant l'unité, par exemple de l'ordre de 0,01, nous pouvons utiliser l'expression approchée

$$\boxed{(1+\varepsilon)^a \approx 1 + a\varepsilon.}$$

L'expression est valable pour ε positif ou négatif et a réel (entier ou non), positif ou négatif.

Exemple : Nous connaissons la période $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{Mga}}$ d'un pendule. L'adjonction d'un petit ressort, de raideur k, agissant à la distance l de l'axe de rotation, modifie la période qui devient

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{Mga + kl^2}}.$$

Vérifions d'abord que le terme correctif kl^2 est bien de même dimension que Mga (car on ne peut ajouter que des grandeurs de même nature, c'est-à-dire s'exprimant dans la même unité).

Nous avons

$$Mga = M \,.\, LT^{-2} \,.\, L = ML^2\,T^{-2},$$
$$kl^2 = MT^{-2} \,.\, L^2 = ML^2\,T^{-2}.$$

L'homogénéité est donc vérifiée.

Supposons maintenant que le terme correctif kl^2 soit très petit devant le terme principal Mga.

Nous pouvons écrire $\quad Mga + kl^2 = Mga\left(1 + \dfrac{kl^2}{Mga}\right)$,

soit $\quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{Mga}}\left(1 + \dfrac{kl^2}{Mga}\right)^{-\frac{1}{2}}$,

soit encore

$$T = T_0\left(1 + \frac{kl^2}{Mga}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Puisque $kl^2 \ll Mga$, nous avons aussi $\dfrac{kl^2}{Mga} \ll 1$ et nous pouvons appliquer la formule d'approximation

$$\left(1 + \frac{kl^2}{Mga}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{kl^2}{Mga}.$$

Nous obtenons l'expression approchée

$$T \approx T_0\left(1 - \frac{kl^2}{2\,Mga}\right),$$

qui permet d'éviter le calcul complet de T, et qui donne, pour la variation relative de la période, l'expression très simple

$$\frac{T - T_0}{T_0} = -\frac{kl^2}{2\,Mga}.$$

Maniement des puissances de 10. – Les valeurs numériques sont souvent données sous la forme

$$x = A \,.\, 10^a.$$

A étant un nombre de l'ordre de l'unité, et a un exposant positif ou négatif.

Soit à calculer l'expression

$$Y = \frac{A \,.\, 10^a \times B \,.\, 10^b \times C \,.\, 10^c \times \ldots}{D \,.\, 10^d \times E \,.\, 10^e \times F \,.\, 10^f \times \ldots}$$

Avant de procéder au calcul, il est commode de recopier l'expression sous la forme

$$Y = \frac{A \times B \times C \times \ldots}{D \times E \times F \times \ldots} \cdot 10^{a+b+c+\ldots-(d+e+f+\ldots)}$$

Le terme $\dfrac{A \times B \times C \times \ldots}{D \times E \times F \times \ldots}$ se calcule à la règle.

Exemple : L'ordonnée d'un électron au sortir d'un champ électrique uniforme est

$$y = \frac{1}{2} \frac{eEl^2}{mv^2},$$

avec $e = 1{,}6 \,.\, 10^{-19}$ C, $E = 4\,000$ V.m^{-1} $= 4 \,.\, 10^3$ V.m^{-1},
$l = 4$ cm $= 4 \,.\, 10^{-2}$ m, $m = 9{,}1 \,.\, 10^{-31}$ kg et
$v = 16\,000$ km.s^{-1} $= 1{,}6 \,.\, 10^7$ m.s^{-1}.

Nous avons donc

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1{,}6 \,.\, 10^{-19} \times 4 \,.\, 10^3 \times (4 \,.\, 10^{-2})^2}{9{,}1 \,.\, 10^{-31} \times (1{,}6 \,.\, 10^7)^2}.$$

Nous recopions l'expression sous la forme :

$$y = \frac{1{,}6 \times 4 \times 4^2}{2 \times 9{,}1 \times (1{,}6)^2} \cdot 10^{-19+3-4-(-31+14)}.$$

Il vient

$$y = \frac{2 \times 16}{9{,}1 \times 1{,}6} \cdot 10^{-19+3-4+31-14},$$

soit $y = \dfrac{20}{9{,}1} \cdot 10^{-3} = 2{,}2 \,.\, 10^{-3}$ m $= 2{,}2$ mm.

A. — Mécanique

1

1. – *Travail et puissance* . (Cours de 2e CT.)
2. – *Mouvement rectiligne uniformément varié.*
3. – *Théorème du mouvement du centre de gravité :* $M\vec{\gamma}_G = \sum \vec{F}_{ext.}$

N.B. – Dans tout le problème on prendra $g = 9{,}8$ m/s^2. La question 4° est indépendante des autres.

1° Une automobile de masse M = 1 000 kg tire une caravane de masse M′ = 2 000 kg sur une route AB rectiligne et horizontale. Les deux véhicules sont animés d'une vitesse constante v = 80 km/h. Les diverses forces de frottement et la résistance de l'air sont équivalentes à deux forces, $\vec{f}$ et $\vec{f}'$, exercées respectivement sur l'automobile et la caravane, de même direction que celle du mouvement, de sens contraire à la vitesse et d'intensité $f = f' = 200$ N que l'on considérera constante dans tout le problème. Déterminer, au cours de ce mouvement,

a) la force de traction exercée par l'automobile sur la caravane,

b) la puissance développée par le moteur.

2° Les deux véhicules abordent au point B une côte à 5 % (on s'élève de 5 mètres pour une longueur parcourue de 100 mètres). La vitesse en B est 80 km/h.

a) La force de traction exercée par le moteur restant la même qu'au 1°, que devient alors le mouvement des deux véhicules ?

Calculer son accélération.

Calculer la vitesse des deux véhicules après un parcours BC = 300 m sur la côte.

b) Arrivé au point C, le conducteur veut alors atteindre à nouveau la vitesse de 80 km/h, ceci en 30 s.

Quelle est la force de traction supposée constante que doit exercer le moteur pendant ce temps ?

En quel point D de la côte la vitesse désirée sera-t-elle atteinte ?

c) Le conducteur veut rouler à la vitesse constante de 80 km/h pendant tout le reste de la côte. Quelle devra être la force de traction exercée par le moteur ?

3° A l'intérieur de la caravane se trouve une lampe suspendue au plafond par un fil. Quel est l'angle d'inclinaison du fil par rapport à une perpendiculaire au plan de la route pendant les phases du mouvement indiquées par les parties *b*) et *c*) de la question précédente ?

4° Les deux véhicules sont arrêtés en haut d'une descente à 7 %, et ne sont plus liés l'un à l'autre. L'automobile est devant la caravane. Brusquement leurs freins lâchent.

a) Quel serait le mouvement des deux véhicules s'il n'y avait pas de frottement ?

b) Les forces de frottement ont les intensités indiquées au 1°.

Quel est le mouvement des deux véhicules ? Que va-t-il se passer ?

c) Les centres de gravité des deux véhicules sont situés à 10 mètres l'un de l'autre au départ. A quels instants se produira le choc ? (On négligera les dimensions des véhicules.)

(Bacc. C et E. Dijon, juin 1973)

1° Déplacement horizontal.

a) Force de traction. – Le mouvement se faisant dans un plan horizontal, le poids des deux mobiles ne travaille pas et la force de traction devra simplement équilibrer les forces résistantes f et f'. Nous aurons donc

$$T = f + f' = 400 \text{ N}.$$

b) Puissance développée. – La puissance développée par le moteur est le travail fourni par la force de traction pendant une seconde. Il est le produit du module de cette force par le chemin parcouru en une seconde car le déplacement est parallèle à la force.

C'est donc le produit du module de $\vec{T}$ par la vitesse, exprimée en m.s^{-1} ,

$$v = \frac{80 \times 1\,000}{3\,600} = 22{,}22 \text{ m.s}^{-1}$$

et

$$P = vT = 22{,}22 \times 400 = 8\,889 \text{ W}.$$

Compte tenu des ordres de grandeur, nous pouvons exprimer aussi ce résultat en chevaux-vapeur :

$$P \approx \frac{8\,889}{75 \times 9{,}8} = 12{,}1 \text{ ch}.$$

2° Déplacement ascendant.

a) La force de traction reste la même. – Les poids vont maintenant travailler et nous ne pouvons plus faire le raisonnement simplifié précédent. Nous devons faire le bilan complet des forces (*fig.* 1).

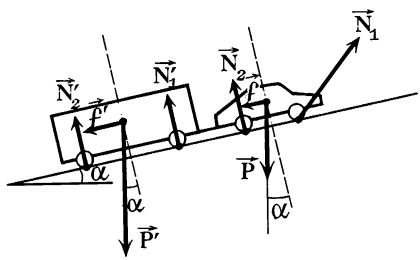


FIG. 1

Les forces $\vec{f}$ et $\vec{f}'$ rassemblant toutes les forces de frottement, toutes les réactions de la route sur les roues sont normales à la route, sauf celle, $\vec{N}_1$, des roues motrices, dont la composante parallèle à la route est la force de traction $\vec{T}$. L'ensemble n'ayant pas de mouvement perpendiculaire à la route, les composantes normales s'équilibrent grâce à l'ajustement des diverses réactions.

Parallèlement à la route orientée arbitrairement dans le sens ascendant, par exemple, nous pouvons écrire algébriquement

$$F = T - f - f' - P \sin \alpha - P' \sin \alpha,$$

$\vec{F}$ étant la résultante des forces s'exerçant sur le système, $\vec{T}$ ayant gardé la valeur qu'il avait précédemment, soit, en module, $\vec{T} = f + f'$, cette expression se réduit à

$$\bar{F} = -(P + P') \sin \alpha,$$

le signe moins indiquant que la force s'oppose au mouvement. L'application du principe fondamental de la Dynamique nous donne alors l'accélération, toujours algébriquement

$$\bar{\gamma} = \frac{\bar{F}}{M + M'} = -\frac{P + P'}{M + M'} \sin \alpha = -g \sin \alpha.$$

L'accélération est constante, de sens opposé au mouvement : celui-ci est donc uniformément retardé.

Numériquement

$$\bar{\gamma} = -9{,}8 \times \frac{5}{100} = -0{,}49 \text{ m s}^{-2}.$$

Si nous prenons B comme origine des distances et l'instant du passage des véhicules en ce point comme origine des temps, les équations du mouvement sont

$$x = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t \qquad \text{et} \qquad v = \gamma t + v_0,$$

v_0 étant la vitesse des véhicules au passage en B et toutes les grandeurs étant prises algébriquement.

De la première équation, nous tirons

$$t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2\gamma x}}{\gamma}$$

et, en reportant dans la seconde,

$$v = \pm \sqrt{v_0^2 + 2\gamma x}.$$

Seule la valeur positive nous intéresse ici, en effet, l'ensemble des deux véhicules, après s'être arrêté à une certaine distance de B, redescendra en prenant en tous points une vitesse opposée à celle qu'il avait à la montée, mais notre étude se limite à cette montée. (Nous remarquons au passage que si $x > \left|\frac{v_0^2}{2\gamma}\right|$, il n'y a pas de solution ; ceci correspond à la hauteur maximale atteinte par les véhicules avant de redescendre.)

Numériquement, ici,

$$v = \sqrt{(22{,}22)^2 - 2 \times 0{,}49 \times 300} = 14{,}14 \text{ m.s}^{-1}, \qquad \text{ou} \qquad 50{,}9 \text{ km.h}^{-1}.$$

b) Nouvelle accélération. — Prenons en C la nouvelle origine des distances et à l'instant du passage en C la nouvelle origine des temps. La vitesse sera de la forme

$$v = v_1 + \gamma' t,$$

v_1 étant la vitesse à l'arrivée en C et γ' la nouvelle valeur de l'accélération.

Nous en déduisons l'accélération nécessaire :

$$\gamma' = \frac{v - v_1}{t},$$

soit

$$\gamma' = \frac{22{,}22 - 14{,}14}{30} = 0{,}270 \text{ m.s}^{-2},$$

cette accélération étant évidemment algébriquement positive.

La résultante des forces s'exerçant sur le système doit valoir, algébriquement (avec les conventions précédentes)

$$\bar{F} = (M + M')\,\bar{\gamma};$$

or nous savons qu'elle se compose ainsi :

$$\bar{F} = T - f - f' - (P + P')\sin\alpha.$$

Il vient donc

$$T = f + f' + (M + M')(\gamma' + g\sin\alpha),$$

soit

$$T = 400 + (1\,000 + 2\,000)(0{,}270 + 9{,}8 \times 0{,}05) = 2\,680 \text{ N}.$$

Avec les origines que nous avons prises, l'abscisse du mobile est donnée par

$$x = \frac{1}{2}\gamma' t^2 + v_1 t,$$

soit, *numériquement*, à l'arrivée en D,

$$x = \frac{1}{2} \times 0{,}270 \times 30^2 + 14{,}14 \times 30 = 545 \text{ m}.$$

D est donc situé 545 m au-delà de C, soit à

$$545 + 300 = 845 \text{ m du bas de la côte.}$$

c) ***Montée à vitesse constante.*** – Pour que la vitesse soit constante, l'accélération doit être nulle, ainsi donc que la résultante des forces, soit

$$\bar{F} = T - f - f' - (P + P')\sin\alpha = 0$$

et

$$T = f + f' + (P + P')\sin\alpha = 400 + (3\,000) \times 9{,}8 \times 0{,}05 = 1\,870 \text{ N}.$$

3° Inclinaison du fil de la lampe. – A chaque instant, la position du fil de la lampe est telle que, si $\vec{\mathcal{T}}$ est sa tension et $\vec{p}$ le poids de la lampe (dont nous désignerons la masse par m), on ait

$$\vec{\mathcal{T}} + \vec{p} = m\vec{\gamma},$$

$\vec{\gamma}$ étant l'accélération commune à la lampe et aux deux véhicules, si l'on suppose la lampe en équilibre par rapport à la caravane.

Soit encore $\vec{\mathscr{T}} = m(\vec{\gamma} - \vec{g})$. Si nous appelons θ l'angle du fil avec la normale à la route (et au plafond de la caravane) nous aurons (*fig.* 2)

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{m\gamma + mg\sin\alpha}{mg\cos\alpha} = \frac{\gamma + g\sin\alpha}{g\cos\alpha}.$$

En particulier, pour les conditions du *c*), γ est nul et

$$\theta = \alpha \approx 2°\,52'.$$

Dans les conditions du *b*), on a

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{0{,}270 + 0{,}05 \times 9{,}8}{9{,}8\sqrt{1 - (0{,}05)^2}} = 0{,}077\,6,$$

soit

$$\theta \approx 4°\,27'.$$

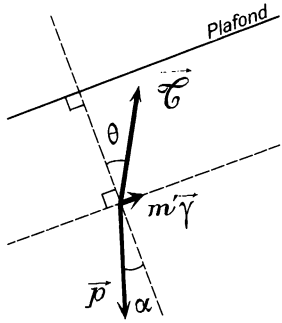


FIG. 2

4° Descente des véhicules sans action du moteur.

a) ***En l'absence de frottements.*** — En l'absence de frottements, les réactions normales $\vec{N}_1$ et $\vec{N}_2$ de la route sur les roues équilibrent la composante normale du poids pour chacun des deux véhicules. La composante parallèle à la route joue le rôle de force motrice car elle est en même temps résultante de l'ensemble des forces appliquées et le véhicule est soumis à une accélération $\vec{\gamma}$ telle que

$$P\sin\beta = M\gamma \quad \text{pour l'automobile}$$
et $$P'\sin\beta = M'\gamma' \quad \text{pour la caravane,}$$

soit en fait pour les deux

$$\gamma = g\sin\beta.$$

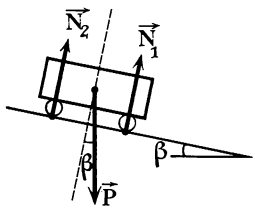


FIG. 3

Les deux véhicules ont donc un mouvement descendant uniformément accéléré, d'accélération

$$\gamma = 9{,}8 \times 0{,}07 = 0{,}686\,\mathrm{m.s^{-2}}.$$

b) ***Mouvement compte tenu des frottements.*** — Les composantes de forces normales à la route s'annulent toujours, mais cette fois, dans les composantes parallèles à la route, vont intervenir les forces résistantes f et f'. Nous aurons donc respectivement

— pour l'automobile :

$$P\sin\beta - f = M\gamma,$$

— pour la caravane :

$$P'\sin\beta - f' = M\gamma',$$

ce qui conduit à deux valeurs différentes pour γ et γ' :

$$\gamma = g \sin \beta - \frac{f}{M} = 9{,}8 \times 0{,}07 - \frac{200}{1\,000} = 0{,}486 \text{ m.s}^{-2}$$

et

$$\gamma' = g \sin \beta - \frac{f'}{M'} = 9{,}8 \times 0{,}07 - \frac{200}{2\,000} = 0{,}586 \text{ m.s}^{-2}.$$

Nous constatons que l'accélération de la caravane est supérieure à celle de l'automobile ; la caravane va donc rattraper l'automobile et la heurter, le mouvement de chacun des deux véhicules étant évidemment uniformément accéléré.

c) ***Instant du choc***. — Prenons comme origine des distances le point de départ de la caravane et comme origine des temps l'instant du lâcher des freins. Les mouvements des deux véhicules ont pour équations

— pour la caravane :

$$x' = \frac{1}{2}\gamma' t^2,$$

— pour l'automobile :

$$x = \frac{1}{2}\gamma t^2 + x_0 ;$$

nous cherchons la valeur de t positive telle que $x = x'$, soit

$$\frac{1}{2}\gamma' t^2 = \frac{1}{2}\gamma t^2 + x_0 \qquad \text{et} \qquad t = \sqrt{\frac{2x_0}{\gamma' - \gamma}},$$

soit, *numériquement*

$$t = \sqrt{\frac{2 \times 10}{0{,}586 - 0{,}486}} = 14{,}14 \text{ s}.$$

2

1. — *Champ électrique uniforme*; action sur une charge sphérique :
$$\vec{F} = q\vec{E}.$$
(Cours de 1ère C et E.)

2. — *Cinématique du mouvement circulaire* : vitesse angulaire et vitesse, accélérations angulaire, tangentielle et normale :
$$v = r\omega; \quad \gamma_T = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}; \quad \gamma_N = \frac{v^2}{r} = r\omega^2.$$

3. — Centre de gravité; *moment d'inertie*.

4. — *Théorème de l'accélération angulaire* :
$$J\theta'' = \sum \mathfrak{M}.$$

A) Deux sphères pleines, A et B, de rayon $r = 1$ cm, de masse $m = 10$ g, sont soudées aux deux extrémités d'une tige de longueur $2l = 20$ cm, dont la masse est négligeable devant celle des sphères; la tige est accrochée par son milieu M à un fil de torsion MO dont la constante de torsion est C = 0,1 m.N/rd.

On écarte le système de sa position d'équilibre d'un angle $\alpha = -0{,}1$ rd et on l'abandonne sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$. Établir la nature du mouvement et écrire son équation horaire.

On rappelle que le moment d'inertie d'une sphère par rapport à un axe passant par son centre de gravité vaut $\frac{2}{5} mr^2$ (m étant la masse de la sphère et r son rayon).

On rappelle également le théorème de Huygens : le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe quelconque Δ' est égal à son moment d'inertie par rapport à l'axe Δ parallèle à Δ' et passant par le centre de gravité, augmenté du produit de la masse du solide par le carré de la distance des deux axes.

B) Deux sphères A′ et B′ isolantes, considérées comme ponctuelles, ayant une masse m', sont placées aux extrémités d'une tige isolante de longueur $2l' = 2$ cm (la masse de la tige est négligeable devant m'). La tige est accrochée en son milieu M′ à un fil de torsion M′O′, dont la constante de torsion C′ vaut 10^{-6} m.N/rd.

La sphère A′ est chargée positivement d'une quantité d'électricité $+ q$, la sphère B′ est chargée de la même quantité d'électricité négative. Le système est alors placé dans un champ électrique $\vec{E}$ uniforme. Le vecteur $\vec{E}$ est parallèle et de même sens que le vecteur $\overrightarrow{B'A'}$ lorsque la torsion du fil est nulle.

***a*) Montrer que le pendule est ainsi en position d'équilibre.**

***b*) Le pendule est écarté d'un angle α de la position initiale. Former l'équation différentielle qui régit le mouvement de ce système.**

c) Quelle hypothèse faut-il formuler pour pouvoir assimiler le mouvement du système à un mouvement sinusoïdal de rotation ? Donner, dans ces conditions, l'expression littérale de la pulsation du mouvement en fonction de m', q, l', E et C'.

d) On mesure la durée de 20 oscillations; on trouve 44 s. Sachant que $m' = 10^{-3}$ kg, $E = 10^5$ V/m, calculer la valeur de q.

C) On donne au système précédent une élongation angulaire $\alpha = 0{,}05$ rd et on l'abandonne sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$.

a) Calculer la vitesse linéaire d'une des sphères, lorsque la tige fait un angle de + 0,02 rd avec sa position d'équilibre.

b) Quelle est, dans cette position, l'accélération angulaire du système ?

c) Préciser alors les caractéristiques du vecteur accélération de la sphère A'. (Faire un schéma représentant les vecteurs vitesse et accélération.)

(Bacc. C et E, Amiens, juin 1975.)

A) Nature du mouvement et équation horaire. – Le système AMB est soumis aux poids des sphères ($m\vec{g}$ pour chacune d'elles), à la tension $\vec{F}$ du fil OM, et au couple de rappel exercé par le fil de torsion. Ce système, de moment d'inertie J par rapport à l'axe OM, est en rotation autour de cet axe.

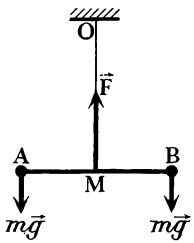


FIG. 1.

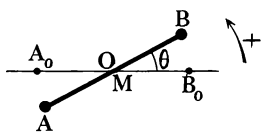


FIG. 2.

Les moments par rapport à l'axe des poids (parallèles à l'axe) et de la tension $\vec{F}$ (colinéaire à l'axe) sont nuls. Lorsque le système est écarté d'un angle θ de sa position d'équilibre A_0B_0 (*fig.* 2), le fil OM, tordu de l'angle θ, exerce un couple de moment $\mathfrak{M} = -C\theta$.

D'après le théorème du moment cinétique, nous pouvons écrire l'équation

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = -C\theta.$$

Expression du moment d'inertie. – Le moment d'inertie d'une sphère, A par exemple, est

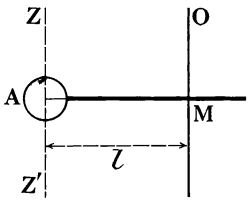


FIG. 3.

$$J_Z = \frac{2}{5}mr^2$$

par rapport à l'axe vertical ZZ' passant par son centre.

D'après le théorème de Huygens, le moment d'inertie par rapport à l'axe parallèle OM est

$$J_A = ml^2 + J_Z = m\left(l^2 + \frac{2}{5}r^2\right).$$

Le moment d'inertie de la tige AB étant nul, le moment d'inertie du système est la somme des moments relatifs aux deux sphères, donc

$$J = J_A + J_B = 2m\left(l^2 + \frac{2}{5}r^2\right).$$

Nature du mouvement. — L'équation

$$J\theta'' = 2m\left(l^2 + \frac{2}{5}r^2\right)\theta'' = -C\theta$$

est l'équation différentielle d'une fonction sinusoïdale du temps

$$\theta = A \sin(\omega t + \varphi),$$

de pulsation

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{2m\left(l^2 + \frac{2}{5}r^2\right)}},$$

soit, *numériquement*,

$$\omega = \sqrt{\frac{0{,}1}{2 \times 0{,}01\left((0{,}01)^2 + \frac{2}{5} \times (0{,}01)^2\right)}} = 22{,}32 \text{ rd.s}^{-1}.$$

Équation horaire. — La vitesse angulaire est, à l'instant t,

$$\theta' = A\omega \cos(\omega t + \varphi).$$

A l'instant initial $t = 0$, nous avons $\theta_0 = \alpha = -0{,}1$ rd et $\theta'_0 = 0$. Les constantes A et φ sont donc définies par les équations

$$(1)\ \alpha = A \sin \varphi, \qquad (2)\ 0 = A\omega \cos \varphi.$$

(2) admet les solutions $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ (modulo 2π) et $\varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$ (modulo 2π) auxquelles l'équation (1) fait correspondre les solutions $A_1 = \alpha$ et $A_2 = -\alpha$. L'équation horaire s'écrit donc

$$\theta = \alpha \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{ou} \quad \theta = -\alpha \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

soit encore, dans les deux cas,

$$\theta = \alpha \cos(\omega t).$$

Avec $\alpha = -0{,}1$ rd, il vient

$$\theta = -0{,}1 \cos(22{,}32\, t).$$

B) *a*) Position d'équilibre du pendule. — Soit $B'_0A'_0$ la position de BA lorsque la torsion du fil est nulle. Lorsque le pendule est écarté de la position $B'_0A'_0$ d'un angle $\theta = \widehat{A'_0OA'}$, le fil de torsion exerce un couple de rappel de moment $\mathfrak{M}_1 = -C'\theta$. Par ailleurs, la sphère A' subit l'action d'une force $q\vec{E}$ de mêmes direction et sens que le vecteur $\overrightarrow{B'_0A'_0}$, et la sphère B' subit l'action d'une force $-q\vec{E}$.

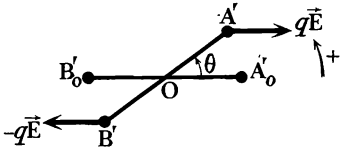


FIG. 4.

Au couple de torsion s'ajoute donc le couple des forces électrostatiques $(q\vec{E}, -q\vec{E})$ dont le bras de levier est $B'A' \,|\sin(\theta)|$ et dont le moment est, en valeur absolue, avec $B'A' = 2l'$,

$$|\mathfrak{M}_2| = 2qEl' \,|\sin(\theta)|.$$

On vérifie, sur la figure 4, que le moment est constamment de signe contraire à θ (pour $-\pi < \theta < \pi$) et, par conséquent, de signe contraire à $\sin\theta$. Nous avons donc

$$\mathfrak{M}_2 = -2qEl' \sin\theta.$$

Par ailleurs, les moments des poids et de la tension du fil de torsion sont encore nuls, comme à la question 1°. En conséquence, le moment résultant est

$$\mathfrak{M} = -C'\theta - 2qEl' \sin\theta.$$

Pour $\theta = 0$, $(\overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{B'_0A'_0})$, le moment résultant est nul. Cette position est donc une position d'équilibre, et cette position est stable puisque les deux couples sont de rappel.

***b)* Équation différentielle du mouvement.** — Le moment d'inertie se réduit ici à $J' = 2m'l'^2$ puisque les rayons r' des sphères sont négligeables. Le théorème du moment cinétique conduit à l'équation

$$J\theta'' = 2m'l'^2\theta'' = -C'\theta - 2qEl' \sin\theta. \tag{3}$$

***c)* Hypothèse permettant d'assimiler le mouvement à un mouvement sinusoïdal de rotation.** — L'équation d'un tel mouvement de pulsation ω, serait de la forme $\theta'' = -\omega^2\theta$.

Pour pouvoir identifier le sinus à l'angle, il faut, et il suffit, que l'angle soit assez petit, inférieur à 6° ou 0,1 rd. Dans ce cas, l'équation (3) s'écrit

$$2m'l'^2\theta'' \approx -(C' + 2qEl')\theta,$$

soit

$$\theta'' \approx -\frac{C' + 2qEl'}{2m'l'^2}\theta.$$

C'est l'équation différentielle d'une fonction sinusoïdale du temps de pulsation

$$\omega = \sqrt{\frac{C' + 2qEl'}{2m'l'^2}}.$$

***d)* Calcul de la charge q.** — La période du mouvement est $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, soit

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2m'l'^2}{C' + 2qEl'}}.$$

On mesure la durée $t = 20\,T = 44$ s. On peut en déduire la valeur de la charge q :

$$q = \frac{1}{2El'}\left(\frac{3\,200\pi^2m'l'^2}{t^2} - C'\right).$$

Avec $E = 10^5$ V . m^{-1}; $m' = 10^{-3}$ kg; $l' = 1$ cm $= 10^{-2}$ m; $t = 44$ s; $C' = 10^{-6}$ m . N . rd^{-1}, il vient

$$q = \frac{1}{2 \times 10^5 \times 10^{-2}} \left(\frac{3\,200\pi^2 \times 10^{-3} \times 10^{-4}}{44^2} - 10^{-6} \right),$$

soit $q = 3{,}16.10^{-10}$ C.

C) ***a)*** **Vitesse d'une des sphères pour l'élongation $\theta = 0{,}02$ rd.** — On montre, comme à la question 1°, que l'équation du mouvement est $\theta = \alpha \cos(\omega t)$.

La période est ici $T = \frac{44}{20} = 2{,}2$ s et la pulsation est

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2{,}2} = \frac{\pi}{1{,}1} \text{ rd.s}^{-1},$$

donc l'équation du mouvement s'écrit

$$\theta = 0{,}05 \cos\left(\frac{\pi t}{1{,}1}\right).$$

La vitesse angulaire est, à l'instant t,

$$\theta' = -\alpha\omega \sin(\omega t)$$

et la vitesse de chacune des sphères est

$$v' = l'\theta' = -\alpha\omega l' \sin(\omega t).$$

Lorsque $\theta = +0{,}02$ rd, nous avons l'équation

$$0{,}02 = 0{,}05 \cos(\omega t),$$

donc $\cos(\omega t) = \frac{2}{5} = 0{,}4$. Dans ces conditions,

$$\sin(\omega t) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(\omega t)} = \pm \sqrt{1 - 0{,}16},$$

soit

$$\sin(\omega t) = \pm 0{,}916\,5.$$

La vitesse de l'une des sphères est donc

$$v' = \pm 0{,}916\,5\, \alpha\omega l' = \pm 0{,}916\,5 \times 0{,}05 \times \frac{\pi}{1{,}1} \times 10^{-2},$$

$$v' = \pm 1{,}309.10^{-3} \text{ m.s}^{-1}.$$

Le signe dépend du sens du passage par la position 0,02 rd. Il est négatif au premier passage (retour vers $\theta = 0$), positif au second, négatif au troisième, etc. Soit n le rang du passage :

$$v'_n = (-1)^n . 1{,}309.10^{-3} \text{ m.s}^{-1}.$$

b) **Accélération angulaire.** — Elle est donnée par l'expression

$$\theta'' = -\alpha\omega^2 \cos(\omega t),$$

soit, avec $\cos(\omega t) = 0{,}4$, $\theta'' = -0{,}05 \times \frac{\pi^2}{(1{,}1)^2} \times 0{,}4 = -0{,}163$ rd.s^{-2}.

c) **Accélération de A'.** – L'accélération tangentielle est

$$\gamma_T = \frac{dv'}{dt} = \frac{d}{dt}(l'\theta') = l'\theta'' = -1{,}63.10^{-3}\,\text{m.s}^{-2}.$$

L'accélération normale est

$$\gamma_N = \frac{v'^2}{l'} = \frac{(1{,}309.10^{-3})^2}{0{,}01} = 1{,}71.10^{-4}\,\text{m.s}^{-2},$$

le vecteur $\vec{\gamma}_N$ étant dirigé vers le centre O' de la trajectoire.

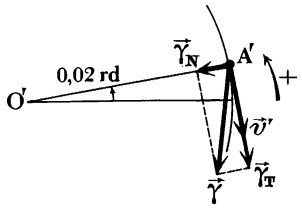


FIG. 5.
Passage de rang impair
$n = 1, 3, 5, \ldots$

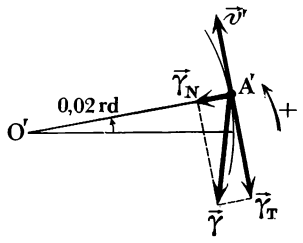


FIG. 6.
Passage de rang pair
$n = 2, 4, 6, \ldots$

3

1. – *Travail d'un couple* .(Cours de 2e CT.)
2. – Accélération angulaire.
3. – Moment d'inertie.
4. – Théorème de l'accélération angulaire :

$$J\theta'' = \sum \mathcal{M},$$

application au *pendule de torsion* et au *pendule pesant*.

A) Un disque plan D, vertical et homogène, de masse M, de rayon R, d'épaisseur constante, peut tourner autour d'un axe horizontal, perpendiculaire à son plan et passant par son centre O. Les frottements sur l'axe sont équivalents à un couple constant, résistant, de moment $\mathcal{M}_r$.

Le disque D, parti du repos, acquiert en t secondes une vitesse de N tours par seconde, sous l'action d'un couple moteur constant. Déterminer l'accélération angulaire θ'' du mouvement.

En déduire

– le moment $\mathcal{M}_m$ du couple moteur,
– le nombre de tours effectués par le disque,
– le travail fourni par le couple moteur dans l'intervalle de temps considéré.

Le moment d'inertie d'un disque, par rapport à son axe de révolution, est $J = \frac{1}{2}MR^2$.

Application numérique :

$M = 1\,kg$; $R = 10\,cm$; $\mathcal{M}_r = -\ 2{,}5.10^{-3}\,m.N$; $t = 10\,s$; $N = 20$.

B) 1° Le disque D oscille autour d'un axe (Δ), perpendiculaire au plan du disque et passant par un point de sa circonférence. Pour cet axe de rotation les frottements sont négligeables. Le disque est écarté légèrement de sa position d'équilibre.

a) Quelle est la période de ses oscillations ?

b) Quelle est la longueur du pendule simple synchrone ?

On rappelle que, conformément au théorème de Huygens, le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe quelconque (Δ) est égal à son moment d'inertie par rapport à un axe, parallèle à (Δ) et passant par le centre de gravité, augmenté du produit de la masse du solide par le carré de la distance des deux axes.

Application numérique : $R = 10\,cm$; $g = 9{,}8\,m.s^{-2}$.

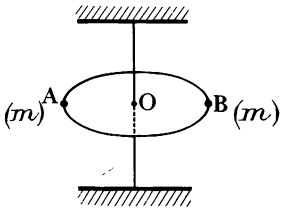
2° L'axe (Δ) et le centre de gravité O déterminent un plan P.

a) Montrer qu'il existe dans ce plan un second axe d'oscillation (Δ′) répondant aux conditions suivantes :

- (Δ) et (Δ′) sont parallèles et situés de part et d'autre de O ;
- ils ne sont pas équidistants de O ;
- les périodes d'oscillation autour de (Δ) et (Δ′) sont égales.

[(Δ) et (Δ′) forment un couple d'axes réciproques.]

b) Préciser la position de l'axe (Δ′).



C) Le disque est maintenant dans un plan horizontal et suspendu par son centre à un fil de torsion vertical. On fixe en chacune des deux extrémités d'un diamètre AB du disque, une masse ponctuelle de valeur *m*. Le système étant en équilibre, on fait tourner le disque d'un certain angle autour du fil de suspension et on l'abandonne à lui-même.

1° Montrer que le mouvement du disque est un mouvement sinusoïdal de rotation et calculer la constante de torsion du fil si la période des oscillations est T secondes.

Application numérique : **M = 1 kg ; *m* = 200 g ; T = 3 s.**

2° On remonte le disque le long du fil vertical dont on fixe l'extrémité inférieure (voir figure). Le disque se trouvant au milieu du fil, on le fait osciller comme dans la question précédente.

Calculer la nouvelle valeur de la période des oscillations du pendule de torsion ainsi réalisé.

La constante de torsion d'un fil cylindrique homogène est inversement proportionnelle à sa longueur.

N.B. — Les trois questions peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

(Bacc. C et E. Rennes, juin 1974)

A) Accélération angulaire. — Le disque, de moment d'inertie $J = \frac{1}{2} MR^2$, se meut autour de l'axe O sous l'effet de son poids $M\vec{g}$, du couple moteur $\mathcal{M}_m$ et des réactions d'axes qui équivalent à une force unique $\vec{R}$ appliquée sur l'axe et à un couple de frottement de moment $\mathcal{M}_r$.

Les moments du poids et de la force $\vec{R}$ sont nuls puisque ces forces s'appliquent sur l'axe. Le théorème de l'accélération angulaire conduit à l'équation

$$J\theta'' = \mathcal{M}_m + \mathcal{M}_r$$

qui donne à l'accélération angulaire la valeur constante

$$\theta'' = a = \frac{\mathcal{M}_m + \mathcal{M}_r}{J}.$$

La vitesse angulaire, primitive de θ'', est donc

$$\theta' = at + \theta'_0.$$

Soit $t = 0$ l'instant du départ, où $\theta'_0 = 0$.

A l'instant t, la vitesse angulaire est N tr.s^{-1}, soit $\theta' = at = 2\pi N$. L'accélération angulaire est donc

$$\theta'' = a = \frac{2\pi N}{t} = \frac{2\pi \times 20}{10} = 4\pi \text{ rd.s}^{-2},$$

soit

$$\theta'' = 12{,}57 \text{ rd.s}^{-2}.$$

Moment du couple moteur. — Connaissant $a = \frac{2\pi N}{t}$, nous pouvons écrire $\frac{2\pi N}{t} = \frac{\mathcal{M}_m + \mathcal{M}_r}{J}$, soit

$$\mathcal{M}_m = \frac{2\pi NJ}{t} - \mathcal{M}_r.$$

Compte tenu de l'expression de J, il vient

$$\mathcal{M}_m = \frac{\pi NMR^2}{t} - \mathcal{M}_r,$$

soit, *numériquement*, avec M = 1 kg, R = 10 cm = 0,1 m, $\mathcal{M}_r = -2{,}5.10^{-3}$ m.N, $t = 10$ s, N = 20,

$$\mathcal{M}_m = \frac{\pi \times 20 \times 1 \times (0{,}1)^2}{10} + 2{,}5.10^{-3} = 6{,}53.10^{-2} \text{ m.N}.$$

Nombre de tours effectués par le disque. — En considérant comme nulle la rotation θ_0 à l'instant $t = 0$, la rotation du disque à l'instant t est la primitive $\theta = \frac{1}{2}at^2$ de θ'.

A l'instant t, $\theta' = at = 2\pi N$, donc

$$\theta = \frac{1}{2} 2\pi Nt = \pi Nt \quad \text{(radians)}.$$

Le nombre de tours effectués par le disque est donc

$$n = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{Nt}{2} = \frac{20 \times 10}{2} = 100 \text{ tours}.$$

Travail fourni par le couple moteur. — Le travail produit par le couple constant $\mathcal{M}_m$ au cours de la rotation θ est

$$W = \mathcal{M}_m \theta = \mathcal{M}_m \pi Nt.$$

Numériquement, il vient

$$W = 6{,}53.10^{-2} \times 200\pi = 41 \text{ joules}.$$

B) 1° *a*) Période des oscillations du disque. — Le disque oscille autour de l'axe (Δ) sous l'effet de son poids $M\vec{g}$ appliqué en O, et de la réaction $\vec{R}$ de l'axe O. Le moment de $\vec{R}$, appliqué sur l'axe, est nul par rapport à cet axe.

Le bras de levier du poids est

$$OH = \Delta O \,|\sin\theta| = R \,|\sin\theta|.$$

En valeur absolue, le moment du poids est

$$|\mathfrak{M}| = MgR \,|\sin\theta|.$$

L'angle θ, compris entre $-\pi$ et $+\pi$, est toujours de même signe que son sinus. Mais le poids est une force de rappel qui tend à rétablir le rayon ΔO dans la direction et le sens de l'axe vertical descendant Δz ; donc $\mathfrak{M}$ et θ sont de signes contraires, ainsi que $\mathfrak{M}$ et $\sin\theta$. Nous devons écrire

$$\mathfrak{M} = -MgR \sin\theta.$$

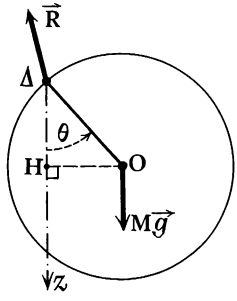


FIG. 1

D'après le théorème de Huygens, le moment d'inertie relatif à l'axe (Δ), J_Δ, est égal au moment d'inertie J_0 augmenté du moment d'inertie de la masse totale concentrée en O :

$$J_\Delta = J_0 + MR^2.$$

Avec $J_0 = \frac{1}{2} MR^2$, il vient

$$J_\Delta = \frac{3}{2} MR^2.$$

Le théorème de l'accélération angulaire conduit ici à l'équation

$$J_\Delta \theta'' = \frac{3}{2} MR^2 \theta'' = - Mg R \sin \theta,$$

qui, toutes simplifications faites, et pour de petites élongations telles que $\sin \theta \approx \theta$, se réduit à

$$\theta'' + \frac{2}{3} \frac{g}{R} \theta = 0.$$

Nous reconnaissons l'équation différentielle dont la solution θ est une fonction sinusoïdale du temps

$$\theta = A \sin (\omega t + \varphi)$$

de pulsation

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{3R}}$$

et de période

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{3R}{2g}} = 2\pi \sqrt{\frac{3 \times 0{,}1}{2 \times 9{,}8}},$$

soit

$$T = 0{,}777 \text{ s}.$$

***b)* Longueur du pendule simple synchrone.** — C'est le pendule simple de longueur l, dont la période $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ est égale à celle du disque D. Nous avons donc

$$2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{3R}{2g}},$$

soit

$$l = \frac{3R}{2} = \frac{3 \times 0{,}1}{2} = 0{,}15 \text{ m}.$$

2° *a)* **Existence de l'axe réciproque (Δ').** — L'axe (Δ') rencontre le diamètre ΔO en un point situé à la distance R' de O.

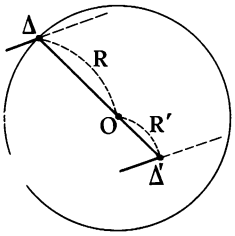


FIG. 2

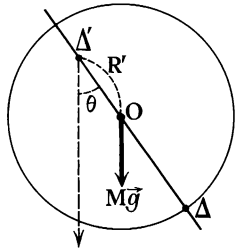


FIG. 3

Lorsque le disque oscille autour de Δ', son moment d'inertie est

$$J_{\Delta'} = J_0 + MR'^2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR'^2.$$

Le moment du poids par rapport à Δ' est

$$\mathfrak{M}' = -MgR' \sin\theta \approx -MgR'\theta$$

et le théorème de l'accélération angulaire conduit à l'équation

$$\left(\frac{1}{2}MR^2 + MR'^2\right)\theta'' = -MgR'\theta,$$

soit

$$\left(\frac{R^2}{2} + R'^2\right)\theta'' = -gR'\theta.$$

La période des oscillations est alors

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{R^2}{2} + R'^2}{gR'}}.$$

Cette période est égale à $T = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}$ si la distance R' satisfait la condition

$$\frac{R^2}{2R'} + R' = \frac{3R}{2},$$

soit

$$R'^2 - \frac{3}{2}RR' + \frac{R^2}{2} = 0.$$

Les racines de cette équation sont

$$R'_1 = \frac{\frac{3}{2}R + \sqrt{\frac{9}{4}R^2 - 2R^2}}{2} = \frac{\frac{3}{2}R + \frac{1}{2}R}{2} = R,$$

$$R'_2 = \frac{\frac{3}{2}R + \sqrt{\frac{9}{4}R^2 - 2R^2}}{2} = \frac{\frac{3}{2}R + \frac{1}{2}R}{2} = \frac{R}{2}.$$

La première solution doit être écartée puisque les axes doivent être à des distances inégales de O. La seconde condition convient, et il existe un axe réciproque à Δ.

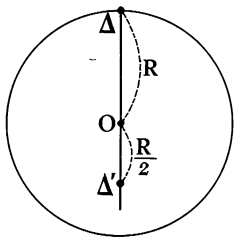


FIG. 4

b) **Position de (Δ').** — L'axe réciproque (Δ') perce le plan du disque, sur le diamètre ΔO, au milieu Δ' du rayon opposé au rayon OΔ (*fig.* 4). On remarque que la distance entre les axes réciproques est $\Delta\Delta' = \frac{3R}{2} = l$, longueur du pendule simple synchrone.

C) 1° Montrer que le mouvement du disque est un mouvement sinusoïdal de rotation. — Soit A_0B_0 la position d'équilibre du diamètre AB, lorsque le fil ne subit aucune torsion. Si le disque tourne de l'angle $\theta = (OB_0, OB)$, le fil exerce un couple de rappel proportionnel à θ, de moment

$$\mathfrak{M} = -C\theta.$$

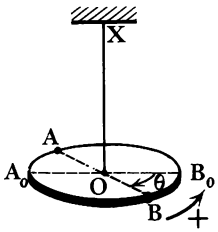


FIG. 5

Le poids du disque et la tension du fil sont des forces appliquées en O, sur l'axe OX, donc de moments nuls par rapport à cet axe. Soit J'_0 le moment d'inertie du système par rapport à OX. Nous avons ici

$$J'_0 = \frac{1}{2}MR^2 + 2mR^2 = \left(\frac{M}{2} + 2m\right)R^2.$$

L'application du théorème de l'accélération angulaire donne l'équation

$$J'_0\theta'' = \left(\frac{M}{2} + 2m\right)R^2\theta'' = -C\theta.$$

L'angle θ est donc une fonction sinusoïdale du temps de pulsation

$$\Omega = \sqrt{\frac{C}{\left(\frac{M}{2} + 2m\right)R^2}}$$

et de période

$$T = 2\pi R \sqrt{\frac{\frac{M}{2} + 2m}{C}}.$$

Connaissant T = 3 s, R = 0,1 m, M = 1 kg et m = 200 g = 0,2 kg, nous pouvons calculer C :

$$C = \frac{2\pi^2 R^2 (M + 4m)}{T^2} = \frac{2\pi^2 \times (0,1)^2 (1 + 0,8)}{9},$$

soit

$$C = 3,95.10^{-2} \text{ m.N.rd}^{-1}.$$

2° Nouvelle valeur de la période. — Le moment d'inertie du système est toujours

$$J'_O = \left(\frac{M}{2} + 2m\right) R^2.$$

Lorsque le disque tourne de l'angle θ à partir de sa position d'équilibre, les deux brins OX et OY sont tordus l'un et l'autre de l'angle θ.

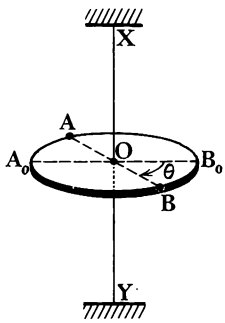


FIG. 6

Soit C′ la constante de torsion de OX, ou de OY. Chaque brin du fil exerce le couple de rappel — C′θ, et les deux ensembles le couple

$$\mathfrak{M} = - 2C'\theta.$$

Le théorème de l'accélération angulaire donne l'équation

$$\left(\frac{M}{2} + 2m\right) R^2 \theta'' = - 2C'\theta$$

et θ est une fonction sinusoïdale du temps de période

$$T' = 2\pi R \sqrt{\frac{\frac{M}{2} + 2m}{2C'}}.$$

Or, la constante de torsion d'un fil cylindrique homogène est inversement proportionnelle à sa longueur. Pour le fil entier XY, la constante de torsion est C. Cette constante est donc C′ = 2C pour chacune des deux moitiés OX et OY. Nous avons

$$T' = 2\pi R \sqrt{\frac{\frac{M}{2} + 2m}{4C}} = \frac{T}{\sqrt{4}} = \frac{T}{2}.$$

La nouvelle valeur de la période est donc

$$T' = 1,5 \text{ seconde}.$$

4

1. – **Théorème du mouvement du centre de gravité ; application au pendule élastique.**

2. – **Théorème de l'accélération angulaire.**

3. – ***Effet d'inertie*** **(pendule suspendu au plafond d'un wagon).**

4. – ***Forces intérieures et extérieures. Division d'un système en parties simples*** **et application des théorèmes convenables à chacune d'elles.**

Nota. – **La question A, 3° qui fait intervenir l'énergie cinétique, peut être écartée lors d'une première lecture.**

On dispose d'un ressort R à spires non jointives, de masse négligeable, de coefficient de raideur $k = 15\ \text{N.m}^{-1}$ et de longueur à vide $l_0 = 28$ cm.

A) On suspend à ce ressort une masse $m = 150$ g. On tire la masse m verticalement, vers le bas, d'une longueur $a = 2$ cm à partir de sa position d'équilibre et on l'abandonne sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$.

1° Déterminer la nature du mouvement pris par la masse m.

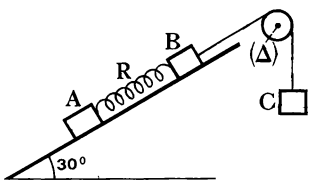
2° Calculer la période T de ce mouvement.

3° Exprimer en fonction du temps l'énergie cinétique de la masse m et calculer sa valeur maximale.

B) Le ressort R, auquel est toujours accrochée la masse $m = 150$ g, est fixé à son autre extrémité au plafond d'un wagon animé d'un mouvement rectiligne horizontal. Pour arrêter ce wagon, on exerce une force de freinage constante et l'on constate que l'axe du ressort s'écarte de la verticale d'un angle $\alpha = 20°$. (Le ressort est amorti de façon à éviter ses oscillations.)

Expliquer cette observation puis calculer l'accélération du mouvement du wagon ainsi que la longueur du ressort.

C) Le ressort R relie maintenant deux corps A et B de même masse $m_A = m_B$, placés sur un plan incliné de 30° sur l'horizontale.



Le corps B est relié à un corps C de masse m_C par l'intermédiaire d'un fil inextensible et de masse négligeable passant dans la gorge d'une poulie.

La poulie est mobile sans frottement autour de son axe horizontal (Δ), son rayon est R. Le moment d'inertie de la poulie par rapport à l'axe (Δ) est J.

Les deux corps A et B glissent avec frottement sur le plan incliné : la force de frottement s'exerçant sur chacun des corps A et B est équivalente à une force $\vec{f}$, parallèle au plan incliné, d'intensité f supposé indépendante de la vitesse.

On abandonne le système sans vitesse initiale.

1° *a*) Donner l'expression littérale des tensions du fil de part et d'autre de la poulie. En déduire l'expression de l'accélération γ du mouvement de C.

b*) *Application numérique :

$m_A = m_B = 200\,g$, $m_C = 400\,g$, $R = 10\,cm$, $J = 0{,}2.10^{-2}\,kg.m^2$, $f = 0{,}25\,N$.

Calculer l'accélération γ et préciser quel est le sens du mouvement du système.

***c*) Déterminer la tension du ressort et sa longueur pendant le mouvement.**

2° Au cours du mouvement précédent, l'attache liant A au ressort est rompue.

***a*) Décrire le mouvement ultérieur du corps A.**

***b*) Quelle est la valeur de l'accélération du mouvement du corps A au cours de chacune des phases de ce nouveau mouvement ?**

N.B. — Les trois parties A), B) et C) sont indépendantes. On donne l'accélération de la pesanteur $g = 10\ m.s^{-2}$.

(Bacc. C et E, Rennes, juin 1973.)

A) 1° Nature du mouvement pris par la masse *m*. — La masse m se meut sous l'effet de son poids mg et de la tension $\vec{F}$ exercée par le ressort. Son accélération $\vec{\gamma}$ est définie, d'après le théorème du mouvement du centre de gravité, par la relation vectorielle

$$m\vec{\gamma} = m\vec{g} + \vec{F}.$$

Projetons sur l'axe Oz, vertical descendant, dont l'origine O est au niveau de la position d'équilibre G_0 du centre de gravité.

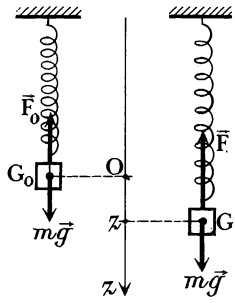


FIG. 1

Au repos, l'accélération est nulle ; l'allongement du ressort est a et la tension $\vec{F}_0$ du ressort est de module $F_0 = ka$. Nous avons l'équation

$$(1) \qquad mg - ka = 0.$$

Au cours du mouvement, l'élongation du centre de gravité est $\overline{G_0G} = z$, la tension du ressort est $\vec{F}$, de module $F = -k(a + z)$, et la projection z'' de $\vec{\gamma}$ est définie par l'équation

$$(2) \qquad mz'' = mg - k(a + z).$$

En éliminant $mg - ka$ entre ces équations, nous obtenons la relation $mz'' = -kz$ qui définit un mouvement sinusoïdal $z = A \sin(\omega t + \varphi)$ de pulsation $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

Les constantes A et φ sont obtenues à partir des conditions initiales. A l'instant $t = 0$ où l'on abandonne la masse m, son élongation est $z_0 = 2\ cm = 2.10^{-2}\ m$, et sa vitesse est nulle ($z'_0 = 0$). L'expression de la vitesse à l'instant t étant $z' = +\omega A \cos(\omega t + \varphi)$, nous avons, en $t = 0$, les relations

$$(3) \qquad z_0 = A \sin \varphi \qquad \text{et} \qquad (4) \quad 0 = \omega A \cos \varphi,$$

qui admettent les solutions

$$\left(A_1 = z_0, \varphi_1 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \text{ et } \left(A_2 = -z_0, \varphi_2 = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right),$$

avec n entier.

Nous obtenons donc deux expressions de l'équation horaire :

$$z = z_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right),$$

$$z = -z_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right),$$

qui se réduisent l'une et l'autre à la forme simple

$$z = z_0 \cos \omega t,$$

l'argument du cosinus étant défini à $2n\pi$ près.

2° Période T du mouvement. – La période est $T = \frac{2\pi}{\omega}$, soit

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Avec $m = 150\ g = 0{,}150\ kg$ et $k = 15\ N.m^{-1}$, il vient

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{0{,}15}{15}} = \frac{2\pi}{10} = 0{,}628\ s.$$

3° Énergie cinétique de la masse *m*. – La vitesse à l'instant t étant $z' = -\omega z_0 \sin \omega t$, l'énergie cinétique à cet instant est

$$E = \frac{1}{2} m z'^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 z_0^2 \sin^2 \omega t.$$

Avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{15}{0{,}15}} = 10\ rd.s^{-1}$, $m = 0{,}15\ kg$ et $z_0 = 2\,cm = 2.10^{-2}\,m$, nous avons

$$E = \frac{1}{2} \times 0{,}15 \times 100 \times 4.10^{-4} \sin^2 (10t),$$

soit

$$E = 3.10^{-3} \sin^2 (10t)$$

La valeur maximale de cette énergie est donc

$$E_{max} = 3.10^{-3}\ joule.$$

B) Accélération du mouvement du wagon et longueur du ressort. – Le mouvement du wagon est retardé, donc son accélération $\vec{\gamma}$ et sa vitesse $\vec{v}$ sont de sens contraire. La masse m, au repos par rapport au wagon, possède la même accélération $\vec{\gamma}$ que celui-ci, c'est-à-dire horizontale et de sens opposé à celui du mouvement.

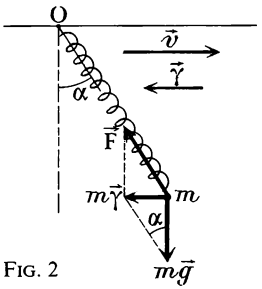


FIG. 2

Or, la masse m se meut sous l'effet de son poids $m\vec{g}$ et de la tension $\vec{F}$ du ressort, dont la résultante est

$$m\vec{\gamma} = m\vec{g} + \vec{F}.$$

Le ressort doit donc s'incliner *vers l'avant* de manière que sa tension, appliquée à la masse m, admette une projection horizontale dirigée *vers l'arrière* (*fig.* 2).

Le parallélogramme des forces résulte de la juxtaposition de deux triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit sont $m\vec{\gamma}$ et $m\vec{g}$. Nous avons la relation

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m\gamma}{mg} = \frac{\gamma}{g}$$

qui permet de calculer le module γ de l'accélération du wagon :

$$\gamma = g \operatorname{tg}\alpha = 10 \operatorname{tg} 20^\circ = 3{,}64 \text{ m.s}^{-2}.$$

La tension du ressort est $F = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$, soit

$$F = \frac{0{,}150 \times 10}{0{,}939\,7} = 1{,}596 \text{ N}.$$

Son allongement est alors $a = \dfrac{F}{k} = 0{,}106$ m et sa longueur est

$$l = l_0 + a = 0{,}28 + 0{,}106 = 0{,}386 \text{ m}.$$

C) 1° *a)* Tensions des fils de part et d'autre de la poulie. — Le corps C, de

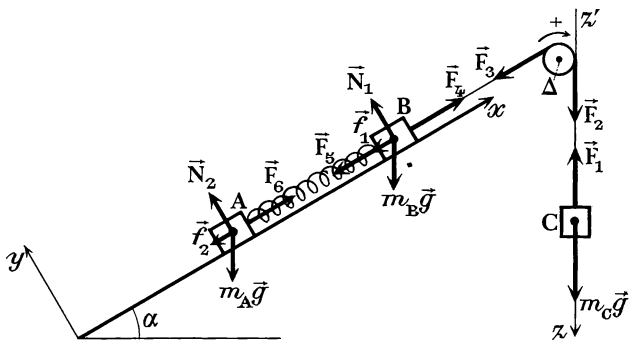


FIG. 3

masse m_C, se meut verticalement sous l'effet de son poids $m_C\vec{g}$ et de la tension $\vec{F}_1$ exercée par le fil. Son accélération $\vec{\gamma}_C$ est définie par l'équation

$$m_C\vec{\gamma}_C = m_C\vec{g} + \vec{F}_1.$$

En projections sur l'axe $z'z$, vertical descendant, nous obtenons l'équation

$$m_C z'' = m_C g - F_1.$$

Le module F_1 de la tension du fil est donc

$$F_1 = m_C(g - z'').$$

Le fil, de masse négligeable, transmet intégralement les tensions ; donc la poulie subit, du côté de C, une tension verticale descendante $\vec{F}_2$, de module

(1) $$F_2 = F_1 = m_C(g - z'').$$

Le système formé par les corps A et B et le ressort, de masse $m_A + m_B$, se meut sous l'effet des poids $m_A\vec{g}$ et $m_B\vec{g}$, des réactions normales $\vec{N}_1$ et $\vec{N}_2$ du plan incliné, des forces de frottement $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$ (avec $\vec{f}_1 = \vec{f}_2 = \vec{f}$), tangentielles, et de la tension $\vec{F}_4$ du fil.

Les tensions $\vec{F}_5$ et $\vec{F}_6$ exercées par le ressort sur les masses A et B n'interviennent pas ici, car ce sont des forces intérieures au système.

Au début du glissement, le ressort acquiert une certaine longueur l qui demeure invariable, ensuite, au cours du mouvement. Plaçons-nous à cet instant où, la longueur du ressort restant invariable, les deux masses m_A, m_B et le ressort possèdent la même vitesse, et la même accélération $\vec{\gamma}$. Cette accélération est aussi celle du centre de gravité du système et nous pouvons écrire l'équation vectorielle

$$(m_A + m_B)\,\vec{\gamma} = m_A\vec{g} + m_B\vec{g} + \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_4.$$

En projections sur l'axe Ox, parallèle à la ligne de plus grande pente du plan et de sens ascendant, nous avons l'équation

$$(m_A + m_B)x'' = -(m_A + m_B)g \sin \alpha - 2f + F_4.$$

Le module F_4 de la tension du fil est donc

$$F_4 = (m_A + m_B)(x'' + g \sin \alpha) + 2f.$$

La poulie subit donc, du côté du plan incliné, une tension parallèle à la ligne de plus grande pente, de sens descendant, de module

$$F_3 = F_4 = (m_A + m_B)(x'' + g \sin \alpha) + 2f. \qquad (2)$$

La poulie est un solide de moment d'inertie J, mobile autour de l'axe (Δ) sous l'effet de son poids, de la réaction de l'axe, et des tensions $\vec{F}_2$ et $\vec{F}_3$.

Le poids est appliqué en un point de (Δ) et son moment est nul par rapport à cet axe.

Le moment de la réaction de l'axe est nul puisqu'il n'y a pas de frottement.

Compte tenu du sens positif de rotation indiqué sur la figure 3, le moment de la force $\vec{F}_2$ est $\mathfrak{M}_2 = +RF_2$, et celui de $\vec{F}_3$ est $\mathfrak{M}_3 = -RF_3$. D'après le théorème de l'accélération angulaire, l'accélération angulaire θ'' de la poulie est définie par l'équation

$$J\theta'' = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = R(F_2 - F_3). \qquad (3)$$

Compte tenu des équations (1) et (2), nous pouvons écrire

$$\theta'' = \frac{R}{J}[m_C(g - z'') - (m_A + m_B)(x'' + g \sin \alpha) - 2f]. \qquad (4)$$

Le fil est inextensible et tendu ; donc, si le corps C se déplace de l'élongation z, le système (A, B) se déplace de l'élongation x et la poulie tourne d'un angle θ tel que

$$z = x = R\theta.$$

Deux dérivations par rapport au temps donnent la relation $z'' = x'' = R\theta''$ et l'équation (4) devient

$$\frac{z''}{R} = \frac{R}{J}[m_C(g - z'') - (m_A + m_B)(z'' + g \sin \alpha) - 2f].$$

On en déduit l'accélération $\gamma = z''$ du corps C :

$$z'' = \frac{m_C g - (m_A + m_B) g \sin \alpha - 2f}{m_A + m_B + m_C + \dfrac{J}{R^2}}.$$

***b)* Application numérique.** — Avec $m_A = m_B = 0{,}2$ kg ; $m_C = 0{,}4$ kg ; $R = 0{,}1$ m, $J = 2.10^{-3}$ kg.m^2 et $f = 0{,}25$ N, il vient $\dfrac{J}{R^2} = \dfrac{2.10^{-3}}{10^{-2}} = 0{,}2$ kg,

et $$z'' = \frac{0{,}4 \times 10 - 0{,}4 \times 10 \times \sin 30° - 0{,}5}{0{,}8 + 0{,}2} = 1{,}5 \text{ m.s}^{-2}.$$

L'accélération du corps C est positive. Abandonné à lui-même sans vitesse initiale, le système se meut donc de telle manière que C prenne une vitesse positive, donc *descendante*. Les corps A et B sont entraînés vers le haut du plan incliné, dans le sens positif de l'axe Ox.

***c)* Tension et longueur du ressort au cours du mouvement.** — Le module de cette tension est celui de l'une des forces $\vec{F}_5$ ou $\vec{F}_6$.

Le corps A se meut sous l'effet des forces $\vec{F}_6$, $\vec{N}_2$, $\vec{f}_2$ et $m_A\vec{g}$. Son accélération $\vec{\gamma}$ est donc définie par l'équation vectorielle $m_A\vec{\gamma} = \vec{F}_6 + \vec{N}_2 + \vec{f}_2 + m_A\vec{g}$. En projections sur l'axe Ox, il vient

$$m_A x'' = F_6 - f_2 - m_A g \sin \alpha,$$

et nous en déduisons le module de la tension du ressort :

$$F_6 = m_A(x'' + g \sin \alpha) + f_2.$$

Avec $x'' = z'' = 1{,}5$ m.s^{-2} et les valeurs numériques précitées, nous avons

$$F_6 = 0{,}2(1{,}5 + 10 \times 0{,}5) + 0{,}25 = 1{,}55 \text{ N}.$$

L'allongement du ressort est

$$a = \frac{F_6}{k} = \frac{1{,}55}{15} = 0{,}103 \text{ m}$$

et sa longueur est

$$l = l_0 + a = 0{,}28 + 0{,}103 = 0{,}383 \text{ m}.$$

2° *a)* Mouvement ultérieur du corps A. — Soit $t = 0$ l'instant où le corps A, animé d'une vitesse v_0 de sens positif sur Ox, se trouve libéré par la rupture de l'attache.

Aussitôt après cette rupture, le corps A, lancé vers le haut, poursuit son ascension sous l'effet de son poids $m_A\vec{g}$, de la réaction $\vec{N}_2$ et de la force de frotte-

ment $\vec{f}_2$ opposée à la vitesse, donc de sens descendant. L'accélération du corps A, définie par l'équation

$$m_A\vec{\gamma}_1 = m_A\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{f}_2,$$

admet sur l'axe Ox la projection γ_1 telle que

$$m_A\gamma_1 = - m_A g \sin \alpha - f_2.$$

Il vient

$$\gamma_1 = - g \sin \alpha - \frac{f_2}{m_A} = - 10 \times 0{,}5 - \frac{0{,}25}{0{,}2} = - 6{,}25 \text{ m.s}^{-2}.$$

Le mouvement est donc retardé au cours de cette première phase où la vitesse est positive. Les équations du mouvement sont

$$v = v_0 - 6{,}25t,$$

$$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} \times 6{,}25 \times t^2.$$

Le corps A s'arrête à l'instant t_1 tel que

$$0 = v_0 - 6{,}25t_1,$$

soit

$$t_1 = \frac{v_0}{6{,}25}.$$

Ensuite, le corps A tend à redescendre sous l'effet de son poids, dont la composante selon Ox est

$$- m_A g \sin \alpha = - 0{,}2 \times 10 \times 0{,}5 = 1 \text{ N}.$$

La force de frottement $\vec{f}_2$, égale à 0,25 N, ne suffit pas pour maintenir le corps A au repos. Le corps A descend le long du plan incliné, mais la force $\vec{f}_2$ change de sens et devient ascendante pour rester opposée au sens du déplacement. L'accélération du corps A devient donc γ_2 telle que

$$m_A\gamma_2 = - m_A g \sin \alpha + f_2,$$

soit

$$\gamma_2 = - g \sin \alpha + \frac{f_2}{m_A}.$$

Le glissement vers le bas est uniformément accéléré, d'accélération

$$\gamma_2 = - 5 + 1{,}25 = - 3{,}75 \text{ m.s}^{-2}.$$

5

1. – *Mouvement de chute libre.*

2. – Théorème du mouvement du centre de gravité ; projection sur un axe normal à la trajectoire : $m\gamma_n = m\dfrac{v^2}{R} = \sum F_n$.

3. – *Théorème de l'énergie cinétique*

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W_{1\to 2}.$$

4. – *Conservation de l'énergie mécanique totale* dans le champ local de la pesanteur : $W_{cin.} + W_{pot.} = Cte$.

Un skieur de masse $m = 80$ kg glisse sur un début de piste formée de trois parties AB, BC et CD.

La partie AB représente un sixième de circonférence verticale de rayon R = 5 m et de centre O′.

BC est une partie rectiligne horizontale de longueur R.

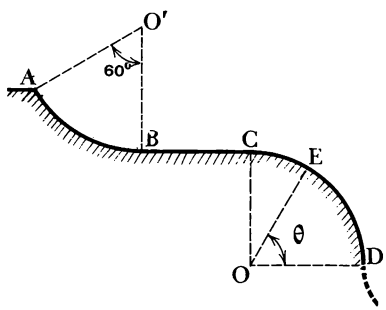
CD est un quart de circonférence verticale de rayon R et de centre O.

Toute la trajectoire a lieu dans le même plan vertical.

Le skieur part de A sans vitesse initiale. Pour simplifier les calculs son mouvement sera, dans tout le problème, assimilé à celui d'un point matériel.

1° Lors d'un premier essai, la piste ABC est verglacée. Les frottements sont alors suffisamment faibles pour être négligés.

Calculer dans ces conditions, avec quelles vitesses v_B et v_C, le skieur passe en B et en C.



2° Au cours d'un autre essai, la piste ABC est recouverte de neige. Le skieur est donc freiné. On supposera pour simplifier que la résultante des forces de frottement, constamment tangente à la trajectoire, garde un module constant F sur tout le trajet ABC.

a) Exprimer v_C en fonction de m, R, F, v_B.

b) Exprimer v_B en fonction de m, R, F, g.

c) Calculer l'intensité de la force de frottement si le skieur arrive en C avec une vitesse nulle.

3° Le skieur arrive en C avec la vitesse v_C ; il aborde la partie CD qui est verglacée ; les frottements seront donc négligés.

***a*) Le skieur passe en un point E de la piste CD, défini par $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}) = \theta$, $\overrightarrow{DO}$ étant porté par l'horizontale. Déterminer**

α) sa vitesse v_E en fonction de v_C, g, R et θ,

β) la réaction Φ de la piste sur le skieur en fonction de m et des mêmes données.

***b*) Pour quelle valeur de l'angle θ, le skieur perd-il le contact avec le sol de la piste CD ? Calculer θ**

α) lorsque la piste ABC est verglacée,

β) lorsque, la piste ABC étant recouverte de neige, le skieur arrive en C avec une vitesse suffisamment faible pour être considérée comme nulle dans les calculs.

4° Au cours d'une descente le skieur a quitté la piste CD pour un angle $\theta = 60°$.

***a*) Quelle était alors sa vitesse au moment du décollage ?**

***b*) Trouver l'équation de la trajectoire suivie après le décollage. On prendra $g = 10\ \text{m.s}^{-2}$.**

(Bacc. C et E. Nice, septembre 1974)

1° Piste verglacée. – Appliquons au système terre-skieur la conservation de l'énergie mécanique totale : la vitesse initiale étant nulle, l'énergie cinétique du skieur arrivé en B sera égale à sa diminution d'énergie potentielle de pesanteur.

Son énergie cinétique en B vaut

$$E_C = \frac{1}{2} m v_B^2.$$

La variation d'énergie potentielle est, en module,

$$\Delta E_P = mg\,\Delta h,$$

où Δh, variation d'altitude du skieur, est

$$\Delta h = R \cos 60° = \frac{R}{2}.$$

Nous aurons donc

$$\frac{1}{2} m v_B^2 = mg \frac{R}{2},$$

d'où

$$v_B = \sqrt{gR}$$

et, *numériquement*,

$$v_B = \sqrt{10 \times 5} = 7{,}07\ \text{m.s}^{-1}.$$

Entre B et C, l'altitude ne variant pas, l'énergie potentielle de pesanteur ne varie pas, l'énergie cinétique du skieur non plus et la vitesse reste donc constante.

$$v_C = v_B = 7{,}07\ \text{m.s}^{-1}.$$

2° Piste enneigée. – Cette fois, une partie de l'énergie mécanique du skieur servira à travailler contre les forces de frottement. Les variations d'énergie

potentielle de pesanteur restant les mêmes, ce travail se soustraira des énergies cinétiques dans le bilan de chaque portion du trajet.

a) ***Parcours* BC.** — Le travail de la force F le long de BC est

$$W = FR.$$

Nous aurons donc

$$E_{C(B)} = W + E_{C(C)},$$

soit

$$\frac{1}{2} m v_B^2 = FR + \frac{1}{2} m v_C^2,$$

d'où

$$v_C = \sqrt{v_B^2 - \frac{2FR}{m}}.$$

On remarque que pour $\frac{2FR}{m} > v_B^2$, le calcul de l'expression est impossible : dans ce cas, le skieur n'atteint pas le point C.

b) ***Parcours* AB.** — Le travail de F le long de AB est

$$W' = \frac{\pi}{3} RF.$$

Nous avons donc

$$\Delta E_P = W' + E_{C(B)},$$

soit

$$mg \frac{R}{2} = \frac{\pi}{3} RF + \frac{1}{2} m v_B^2,$$

d'où

$$v_B = \sqrt{gR - \frac{2\pi RF}{3m}}.$$

c) ***Calcul de* F.** — Si v_C est nul, nous avons $v_B^2 = \frac{2FR}{m}$. Identifions avec l'expression de v_B que nous avons calculée :

$$\frac{2RF}{m} = gR - \frac{2\pi RF}{3m}.$$

Nous en tirons

$$F = \frac{mg}{2\left(1 + \frac{\pi}{3}\right)},$$

soit, *numériquement*,

$$F = \frac{80 \times 10}{2\left(1 + \frac{\pi}{3}\right)} = 195{,}4 \text{ N}.$$

3° Décollage du skieur.

a) Paramètres en un point quelconque.

α) *Vitesse.* – Les frottements sur CD étant négligeables, nous pouvons écrire la conservation de l'énergie mécanique totale.

La diminution d'énergie potentielle de pesanteur est

$$\Delta E_P = mgR(1 - \sin\theta).$$

L'augmentation d'énergie cinétique est

$$\Delta E_C = \frac{1}{2}mv_E^2 - \frac{1}{2}mv_C^2.$$

Il vient donc

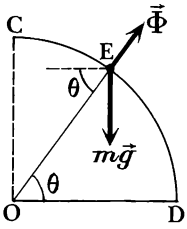
$$\frac{1}{2}mv_E^2 - \frac{1}{2}mv_C^2 = mgR(1 - \sin\theta),$$

d'où

$$v_E = \sqrt{v_C^2 + 2gR(1 - \sin\theta)}.$$

La validité de ce calcul reste soumise, comme nous allons le voir, au fait que la trajectoire du skieur est bien l'arc de cercle CD.

β) *Réaction de la piste.* – Le skieur est soumis à deux forces, la réaction $\vec{\Phi}$ et son poids $m\vec{g}$. La composante tangentielle de ces forces est cause de l'accélération du mouvement ; la composante radiale constitue la force centripète maintenant le skieur sur l'arc de cercle CD.



Les frottements étant négligeables, $\vec{\Phi}$ est normale à la piste, donc radiale, dirigée vers le haut.

La composante radiale du poids a pour module

$$mg\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = mg\sin\theta.$$

Appliquons le théorème du mouvement du centre de gravité.

La force centripète au point E est

$$F = \frac{mv_E^2}{R} = \frac{mv_C^2}{R} + 2mg(1 - \sin\theta).$$

Nous avons donc

$$mg\sin\theta - \Phi = \frac{mv_C^2}{R} + 2mg(1 - \sin\theta),$$

soit

$$\Phi = mg(3\sin\theta - 2) - \frac{mv_C^2}{R}.$$

b) Conditions de décollage. – La réaction de la piste est obligatoirement dirigée vers le haut. Si la force centripète nécessaire au maintien de la trajectoire

devient supérieure à la composante radiale du poids, le skieur décolle. Le décollage a lieu à l'instant de l'égalité, soit pour $\Phi = 0$. Nous avons alors

$$mg(3 \sin \theta - 2) = \frac{mv_C^2}{R},$$

d'où

$$\sin \theta = \frac{2}{3} + \frac{v_C^2}{3Rg}.$$

REMARQUE. — Si v_C^2 est assez grand, on trouve $\sin \theta > 1$, ce qui est mathématiquement absurde mais correspond physiquement à un décollage en C suivant une trajectoire de rayon de courbure supérieur à R.

α) *Piste* ABC *verglacée.* — Nous avons vu que dans ce cas

$$v_C = v_B = \sqrt{Rg};$$

nous avons donc $\sin \theta = \frac{2}{3} + \frac{Rg}{3Rg} = 1$, soit $\theta = \frac{\pi}{2}$. Le skieur décolle en arrivant en C (dans ce cas limite, le rayon de courbure de sa trajectoire en C est égal à R).

β) *Piste* ABC *enneigée.* — Si $v_C = 0$, nous avons

$$\sin \theta = \frac{2}{3}, \qquad \text{soit} \qquad \theta \approx 41° 49'.$$

4° Trajectoire après décollage.

a) Vitesse initiale. — L'expression de la force centripète au point E du décollage est $F = \frac{mv_E^2}{R}$.

Nous savons que $mg \sin \theta - \Phi = F$; or, ici, $\Phi = 0$, puisque E est le point de décollage. Il vient donc

$$mg \sin \theta = \frac{mv_E^2}{R},$$

soit

$$v_E = \sqrt{Rg \sin \theta}$$

et, *numériquement*,

$$v_E = \sqrt{5 \times 10 \times \sin 60°} = 6{,}58 \text{ m.s}^{-1}.$$

b) Équation de la trajectoire. — Plaçons-nous dans un repère orthonormé centré en E, d'axes Ex dirigé dans le sens du mouvement et Ez de haut en bas. L'origine des temps est l'instant du décollage.

- Suivant Ex, il n'y a pas d'accélération et la vitesse initiale est $v_x = v_E \sin \theta$.

La projection du mouvement sur Ex a donc pour équation horaire

$$x = v_E \sin \theta \times t.$$

- Suivant Ez, la vitesse initiale est

$$v_z = v_E \cos \theta$$

et l'accélération g. Nous avons donc

$$z = \frac{1}{2} g t^2 + v_E \cos \theta t.$$

Éliminons t entre les deux équations :

$$z = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_E^2 \sin^2 \theta} + \frac{v_E \cos \theta}{v_E \sin \theta} x = \frac{x^2}{2R \sin^3 \theta} + \frac{x}{\operatorname{tg} \theta}$$

et, *numériquement*,

$$z = \frac{x^2}{2 \times 5 \times \sin^3 60^\circ} + \frac{x}{\operatorname{tg} 60^\circ} = 0{,}154\, x^2 + 0{,}577\, x \quad \text{(en mètres)}.$$

Il s'agit bien entendu d'une parabole, le mouvement du skieur après le décollage étant une chute libre.

6

1. – Accélération normale $\gamma_n = r\omega^2$.
2. – Théorème du mouvement du centre de gravité appliqué au *pendule conique*.
3. – Théorème de l'accélération angulaire.
4. – Division d'un système en parties simples ; application à la *machine d'Atwood* et à un système oscillant, des théorèmes convenables pour chaque partie simple.

Un ressort R, de masse négligeable, a une longueur à vide $l_0 = 10$ cm. L'accélération de la pesanteur est $g = 9{,}80$ m/s^2.

1° On suspend au ressort R un corps A de masse

$$m_A = 500 \text{ g} ;$$

la longueur de R est l_1, égale à 14,9 cm.

Calculer la raideur k de ce ressort.

2° Le corps A est toujours accroché à l'extrémité inférieure du ressort, on réalise un pendule conique en fixant l'extrémité supérieure à un axe vertical animé d'un mouvement de rotation uniforme. L'axe du ressort décrit un cône de demi-angle au sommet α, égal à 60°.

a) Quelle est la longueur l_2 du ressort ?

b) Quelle est la vitesse de rotation du système en tours par seconde?

3° Deux corps A et B de masse $m_A = 500$ g et $m_B = 100$ g sont respectivement attachés, par l'intermédiaire de deux ressorts identiques à R, aux extrémités d'un fil inextensible, de masse négligeable, qui passe, sans glisser dans la gorge d'une poulie C d'axe horizontal, de masse $m = 200$ g, de rayon $r = 4$ cm et de moment d'inertie $J = \frac{1}{2} mr^2$.

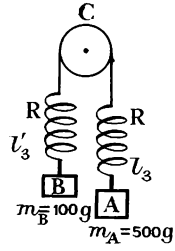


FIG. 1

a) Montrer que les corps A et B sont animés de mouvements uniformément accélérés.

b) Calculer les longueurs l_3 et l'_3 des ressorts.

4° On réalise le dispositif représenté par la figure ci-contre, en utilisant à nouveau la poulie de la question 3°.

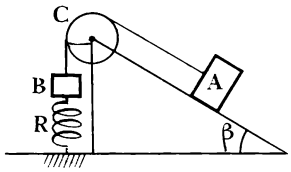


FIG. 2

Le corps A peut glisser sans frottement sur le plan incliné faisant un angle

$$\beta = 30°$$

avec le plan horizontal. Les fils sont inextensibles et de masse négligeable.

***a)* Quelle est la longueur l_4 du ressort lorsque le système est en équilibre ?**

***b)* On tire le corps A vers le bas suivant la ligne de plus grande pente du plan incliné, d'une longueur $a = 4$ cm à partir de sa position d'équilibre, puis on l'abandonne à l'instant $t = 0$ sans vitesse initiale.**

Montrer que le système prend un mouvement oscillatoire sinusoïdal dont on calculera la période T. Écrire l'équation des mouvements des corps A et B et de la poulie C.

(Bacc. C et E. Caen, septembre 1974)

1° Raideur du ressort. – La raideur du ressort est le rapport de la force exercée sur le ressort à l'allongement produit, soit

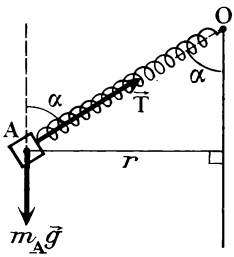
$$k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{m_A g}{l_1 - l_0};$$

numériquement,

$$k = \frac{0{,}5 \times 9{,}80}{(14{,}9 - 10).10^{-2}} = 100 \text{ N.m}^{-1}.$$

2° Pendule conique.

a) Longueur du ressort. – Appliquons au corps A le principe fondamental de la dynamique. La résultante des forces appliquées à A (soit son poids $m_A\vec{g}$ et la tension $\vec{T}$ du ressort) est liée à son accélération $\vec{\gamma}$ par la relation



$$m_A\vec{g} + \vec{T} = m_A\vec{\gamma}.$$

Le mouvement de A étant circulaire uniforme, $\vec{\gamma}$ est centripète et constant, donc perpendiculaire à l'axe vertical. Si nous projetons l'équation précédente sur un axe vertical, il vient

$$m_A g - T \cos \alpha = 0$$

(g et T étant les modules de $\vec{g}$ et $\vec{T}$).

Nous en tirons la valeur de T :

$$T = \frac{m_A g}{\cos \alpha} = 2m_A g,$$

soit deux fois le poids du corps A.

Le corps A produisait un allongement de

$$l_1 - l_0 = 14{,}9 - 10 = 4{,}9 \text{ cm}.$$

L'allongement sera ici

$$\Delta l = 2 \times 4{,}9 = 9{,}8 \text{ cm}$$

et la longueur du ressort

$$l_2 = l_0 + \Delta l = 10 + 9{,}8 = 19{,}8 \text{ cm}.$$

b) ***Vitesse de rotation.*** — Reprenons la figure précédente et l'équation fondamentale de la dynamique appliquée au corps A. Projetons cette fois sur un axe horizontal : la projection de $m_A\vec{g}$ est nulle et

$$T \sin \alpha = m_A \gamma,$$

mais nous avons vu que

$$T = \frac{m_A g}{\cos \alpha},$$

d'où

$$m_A g \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = m_A \gamma \qquad \text{et} \qquad \gamma = g \operatorname{tg} \alpha.$$

L'accélération d'un mouvement circulaire uniforme est liée à la vitesse angulaire ω et au rayon de la trajectoire par la relation

$$\gamma = \omega^2 r.$$

Ici, $r = l_2 \sin \alpha$, d'où $\omega^2 = \dfrac{g \operatorname{tg} \alpha}{l_2 \sin \alpha}$,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l_2 \cos \alpha}}$$

et, si nous voulons le nombre de tours par seconde,

$$n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l_2 \cos \alpha}};$$

numériquement.

$$n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{9{,}80}{19{,}8.10^{-2} \times 0{,}5}},$$

soit

$$n = 1{,}58 \text{ tr.s}^{-1}.$$

3° Machine d'Atwood.

a) ***Mouvement.*** — Pour étudier le mouvement du système, nous allons le séparer momentanément en trois parties en coupant par la pensée le fil inextensible au-dessus de chacun des deux ressorts. Nous appliquerons alors le principe fondamental de la dynamique ou ses conséquences immédiates à chacune des trois parties.

• Pour le corps A (avec le ressort R), si la tension T du brin de fil correspondant est constante, le ressort R a une longueur constante (ce que nous supposerons au départ).

Si nous comptons les accélérations positivement vers le bas, la relation fondamentale de la dynamique, $m_A\vec{g} + \vec{T} = m_A\vec{\gamma}$, deviendra algébriquement $m_A\gamma_A = m_A g - T$.

• De même pour le corps B, en appelant T′ la tension du brin de gauche, nous aurons

$$m_B\gamma_B = m_B g - T'.$$

• Pour la poulie C, nous appliquerons le théorème de l'accélération angulaire. Les forces appliquées à C sont les tensions des deux brins du fil et la réaction de l'axe. Cette dernière a un moment nul. Pour plus de commodité, prenons pour sens positif des rotations le sens inverse du sens trigonométrique. Compte tenu des sens de T et T′, nous aurons

$$(T - T')r = J\theta''.$$

L'accélération angulaire θ'' est liée à l'accélération tangentielle γ_C des points de la circonférence de C par la relation $\gamma_C = r\theta''$.

Nous avons donc

$$(T - T')r = J\frac{\gamma_C}{r} = \frac{1}{2}mr^2\frac{\gamma_C}{r},$$

soit

$$m\gamma_C = 2(T - T').$$

Si les longueurs des ressorts ne varient pas, le fil étant inextensible, nous aurons

$$\gamma_A = \gamma_C = -\gamma_B = \gamma.$$

Éliminons maintenant T et T′ entre les trois équations précédentes : nous avons

$$T - T' = m_A(g - \gamma_A) - m_B(g - \gamma_B) = m_A(g - \gamma) - m_B(g + \gamma),$$

d'où

$$m\gamma = 2(T - T') = 2(m_A - m_B)g - 2(m_A + m_B)\gamma,$$

soit, finalement,

$$\gamma = g\frac{2(m_A - m_B)}{2(m_A + m_B) + m}.$$

Nous trouvons bien une accélération constante, compatible avec la longueur constante des ressorts que nous avons supposée au départ. Notre solution est donc cohérente. (Ce n'est par contre pas la seule, il existerait des solutions où le mouvement général de descente de A et de montée de B se compliquerait d'oscillations du système. Mais la résolution des équations correspondantes sort des limites du programme de Terminale C.)

La valeur numérique de γ est

$$\gamma = 9{,}80\frac{2(0{,}5 - 0{,}1)}{2(0{,}5 + 0{,}1) + 0{,}2} = 5{,}60\ \text{m.s}^{-2}.$$

Elle est positive, donc le corps A descend, B monte et C tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, le tout d'un mouvement uniformément accéléré.

b) Tension des fils. – Nous avons vu que $T = m_A(g - \gamma)$,

$$T = 0{,}5(9{,}80 - 5{,}60) = 2{,}1\ \text{N};$$

son allongement sera

$$\Delta l_3 = \frac{T}{k} = \frac{2{,}1}{100} = 2{,}1.10^{-2}\ \text{m}, \quad \text{ou} \quad 2{,}1\ \text{cm}$$

et sa longueur totale

$$l_3 = l_0 + \Delta l_3 = 10 + 2{,}1 = 12{,}1\ \text{cm}.$$

De même,

$$T' = m_B(g + \gamma) = 0{,}1(9{,}80 + 5{,}60) = 1{,}54\ \text{N}$$

et

$$l'_3 = 0{,}1 + \frac{1{,}54}{100} = 11{,}54.10^{-2}\ \text{m}, \quad \text{ou} \quad l'_3 = 11{,}54\ \text{cm}.$$

4° Oscillations.

a) Longueur du ressort. — Lorsque le système est à l'équilibre, l'ensemble fil-poulie transmet intégralement les forces. Examinons d'abord le corps A : la résultante des forces qui s'y appliquent est nulle. Normalement au plan, la réaction de celui-ci s'ajuste pour assurer l'équilibre ; parallèlement au plan, la tension T du fil équilibre la composante du poids de A, soit

$$T = m_A g \sin \beta.$$

Cette tension est transmise intégralement au corps B qui, lui, n'est soumis qu'à des forces verticales : son poids $m_B\vec{g}$, la tension $\vec{T}$ du fil et celle $\vec{\mathcal{T}}$ du ressort.

En module, nous aurons

$$\mathcal{T} + m_B g = T = m_A g \sin \beta.$$

Numériquement,

$$\mathcal{T} = 0{,}5 \times 9{,}8 \times 0{,}5 - (0{,}1 \times 9{,}8) = 1{,}47\ \text{N}.$$

La longueur du ressort sera

$$l_4 = l_0 + \frac{\mathcal{T}}{k} = 0{,}1 + \frac{1{,}47}{100} = 11{,}47.10^{-2}\ \text{m}, \quad \text{ou} \quad 11{,}47\ \text{cm}.$$

b) Mouvement. — Orientons cette fois la ligne de plus grande pente du plan incliné vers le bas, les sens de rotation dans le sens des aiguilles d'une montre et la trajectoire de B (verticale) vers le haut. Les origines des élongations des divers corps seront leur position d'équilibre. Considérons comme précédemment le corps A, la poulie C et le corps B.

- Pour A, la seule modification est que nous devons considérer la composante du poids parallèle au plan :

$$m_A \gamma_A = m_A g \sin \beta - T$$

(T étant la tension du brin portant A).

• Pour la poulie C, rien ne change :

$$m\gamma_C = 2(T - T'),$$

si T′ est la tension du brin portant B.

• Pour le corps B, nous avons une force supplémentaire, la tension $\mathscr{T}$ du ressort. Compte tenu de la nouvelle orientation, nous aurons

$$m_B\gamma_B = - m_Bg + T' - \mathscr{T}.$$

Comme précédemment, $\gamma_A = \gamma_B = \gamma_C = \gamma$ et, si nous éliminons T et T′ entre les trois équations, il vient

$$\frac{m}{2}\gamma = m_Ag \sin \beta - m_A\gamma - m_Bg - m_B\gamma - \mathscr{T},$$

soit

$$\gamma\left(m_A + m_B + \frac{m}{2}\right) = m_Ag \sin \beta - m_Bg - \mathscr{T}.$$

Exprimons maintenant $\mathscr{T}$ en fonction de l'élongation y de B (par rapport à sa position d'équilibre)

$$\mathscr{T} = k(l_4 + y - l_0) = ky + k(l_4 - l_0).$$

Mais si nous revenons à la partie *a*) de cette question, nous y retrouvons que

$$k(l_4 - l_0) = m_Ag \sin \beta - m_Bg.$$

Si nous reportons alors la valeur de $\mathscr{T}$ dans l'équation dynamique du mouvement, il vient

$$\gamma\left(m_A + m_B + \frac{m}{2}\right) = - ky.$$

C'est l'équation d'un mouvement oscillatoire sinusoïdal de pulsation

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_A + m_B + \frac{m}{2}}}.$$

Numériquement,

$$\omega = \sqrt{\frac{100}{0{,}5 + 0{,}1 + 0{,}1}} = 11{,}95 \approx 12 \text{ rd.s}^{-1}.$$

La période du mouvement est

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{11{,}95} = 0{,}526 \text{ s}.$$

L'équation horaire du mouvement de B est de la forme

$$y = a \cos (\omega t + \varphi).$$

Pour $t = 0$, $y = a$, donc $\varphi = 0 \pmod{2\pi}$, d'où

$$y = a \cos \omega t = 4.10^{-2} \cos 12t \quad \text{(en mètres)}.$$

L'élongation de A est à chaque instant égale à celle de B, soit

$$x = 4.10^{-2} \cos 12t.$$

L'élongation angulaire θ de la poulie C est liée à y par la relation $\theta = \frac{y}{r}$.

Il vient donc

$$\theta = \frac{y}{r} = \frac{a}{r} \cos 12t = \cos 12t \quad \text{(en radians)}.$$

REMARQUE. — L'accélération γ a pour expression en fonction de t

$$\gamma = -a\omega^2 \cos \omega t, \qquad \text{soit} \qquad \gamma = 5{,}72 \cos 12t.$$

Nous avons vu que la tension T du fil supportant A avait pour expression

$$T = m_A g \sin \beta - m_A \gamma,$$

soit

$$T = 0{,}5(9{,}8 \times 0{,}5 + 5{,}72 \cos 12t),$$

expression qui prend à chaque période des valeurs négatives, or la tension d'un fil ne peut devenir négative. La valeur proposée pour a est en fait trop forte pour que le mouvement puisse se faire dans les conditions décrites. (Il se pose un problème identique pour T′ et l'amplitude maximale admissible est 2,1 cm.)

℘ 7

1. – Principes de la dynamique.
2. – *Force d'inertie*, $\vec{F} = -m\vec{\gamma}$, appliquée au pendule conique, d'abord d'inclinaison libre, puis d'inclinaison déterminée par une liaison supplémentaire.
3. – *Quantité de mouvement* ; énergie cinétique ; leur conservation au cours d'un *choc élastique*.

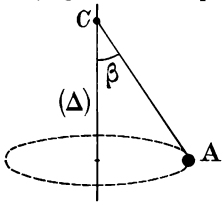
1° Une bille A de masse m est suspendue en un point C d'un axe horizontal (Δ) par un fil de longueur l de masse négligeable. Le pendule ainsi réalisé peut être considéré comme simple. Calculer la période des petites oscillations de ce pendule. On prendra $g = 10$ m/s^2 et $l = 40$ cm.

2° On écarte ce pendule d'un angle α de la verticale, on le lâche sans vitesse initiale.

a) Calculer la vitesse linéaire V de la bille à son passage à la verticale (application numérique : $\cos\alpha = 0{,}98$).

b) A cet instant la bille A rencontre une bille B immobile dont la masse est m' et dont le centre est sur le support de $\vec{V}$. Quelles seront les vitesses v_1 de la bille A et v_2 de la bille B après le choc ? On admettra que le choc est parfaitement élastique et qu'au cours du choc l'énergie cinétique totale du système se conserve, de même que sa quantité de mouvement. On donne $m = 0{,}3$ kg et $m' = 0{,}1$ kg.

c) Quelle sera l'amplitude angulaire du mouvement du pendule après le choc ?

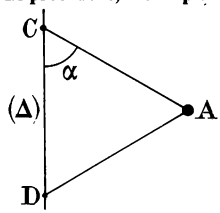


3° L'axe (Δ) est placé maintenant verticalement et la bille A est lancée de telle sorte que le pendule tourne autour de l'axe (Δ) et décrive un cône de révolution de demi-angle au sommet β égal à 60°.

a) Avec quelle vitesse angulaire la bille A tourne-t-elle autour de (Δ) ?

b) Quelle est la valeur de la tension du fil AC (avec $m = 0{,}3$ kg) ?

4° La bille A, restant fixée au point C de l'axe vertical (Δ) par le fil précédent, est en plus reliée en un autre point D de (Δ) par un autre fil AD de même longueur l que le premier fil AC, et de masse négligeable ; en outre DC = l également.



a) Quelle valeur minimale la vitesse angulaire de A doit-elle avoir pour que le fil AD soit tendu à son tour ?

b) En supposant que la vitesse angulaire soit le double de celle que l'on vient de calculer, déterminer les tensions des deux cordes AC et AD.

(Bacc. C et E. Lyon. septembre 1972)

1° Pendule simple. — Le pendule réalisé étant assimilable à un pendule simple, la période des petites oscillations est donnée par la formule

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

soit, *numériquement*,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{0{,}4}{10}} = 2\pi \times 0{,}2 = 1{,}256\ \text{s}.$$

2° Choc avec une autre bille.

a) Vitesse de la bille-pendule. — Pour résoudre cette question, nous allons utiliser la conservation de l'énergie totale du système pendule-Terre. La variation d'énergie cinétique entre l'instant du lâcher et le passage à la verticale compensera la variation d'énergie potentielle de pesanteur de la bille entre les deux positions correspondantes, soit

$$\Delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + \Delta\,(mgh) = 0,$$

ou

$$\frac{1}{2}mV^2 = mg\,\Delta h,$$

Δh étant la valeur arithmétique de la variation d'altitude de la bille.

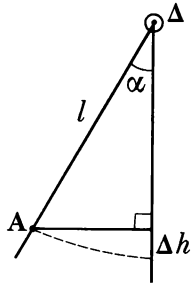


FIG. 1

Nous pouvons évidemment diviser les deux membres par m et si nous remarquons (*fig.* 1) que

$$\Delta h = l(1 - \cos\alpha),$$

nous obtenons

$$V^2 = 2gl(1 - \cos\alpha)$$

et

$$V = \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)},$$

soit, *numériquement*,

$$V = \sqrt{2 \times 10 \times 0{,}4(1 - 0{,}98)} = \sqrt{0{,}16} = 0{,}4\ \text{m.s}^{-1}.$$

b) Choc. — Le choc étant parfaitement élastique, nous pouvons adjoindre la relation de conservation des énergies cinétiques à celle de conservation des quantités de mouvement. Nous avons donc

$$mV + 0 = mv_1 + m'v_2$$

et

$$\frac{1}{2}mV^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}m'v_2^2\,;$$

les deux membres de la deuxième relation peuvent immédiatement être multipliés par 2.

Regroupons maintenant dans les membres de gauche les termes en m et à droite les termes en m' :

$$m(V - v_1) = m'v_2,$$
$$m(V^2 - v_1^2) = m'v_2^2.$$

Si nous effectuons le quotient membre à membre de la seconde relation par la première, nous arrivons à la relation $V + v_1 = v_2$ (l'opération effectuée élimine la solution éventuelle $v_1 = V, v_2 = 0$ mais celle-ci n'a aucun intérêt car elle représente les conditions avant le choc).

Nous obtenons donc finalement un système équivalent au précédent en rassemblant cette équation et la relation sur les quantités de mouvement, soit

$$m(V - v_1) = m'v_2, \qquad V + v_1 = v_2.$$

Nous obtenons aisément v_1 en remplaçant v_2 dans la première équation :

$$m(V - v_1) = m'(V + v_1),$$

d'où

$$v_1 = V\frac{m - m'}{m + m'},$$

soit, *numériquement*,

$$v_1 = 0{,}4 \times \frac{0{,}3 - 0{,}1}{0{,}3 + 0{,}1} = 0{,}2 \text{ m.s}^{-1}$$

et

$$v_2 = V + v_1,$$

soit

$$v_2 = 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6 \text{ m.s}^{-1}.$$

Ces relations sont algébriques en orientant le support de $\vec{V}$ qui est aussi celui de $\vec{v}_1$ et de $\vec{v}_2$ dans le sens de $\vec{V}$. Toutes les vitesses trouvées sont donc de même sens.

c) ***Mouvement résultant du pendule.*** – Pour déterminer l'angle dont le pendule s'écartera de la verticale après le choc, nous allons appliquer à nouveau la relation de la question 2°, *a*).

Soit α' l'angle maximal que fera le pendule avec la verticale, en remarquant que sa vitesse sera alors nulle, on trouve donc

$$v_1^2 = 2gl(1 - \cos\alpha');$$

or

$$V^2 = 2gl(1 - \cos\alpha),$$

d'où

$$\cos\alpha' = 1 - \frac{v_1^2}{V^2}(1 - \cos\alpha),$$

soit, *numériquement*,

$$\cos\alpha' = 1 - \frac{(0{,}2)^2}{(0{,}4)^2}(1 - 0{,}98) = 1 - 0{,}005 = 0{,}995 ;$$

α et α' étant petits, $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$, donc

$$V^2 = 2gl(1 - \cos\alpha) = 2gl\frac{\alpha^2}{2} = gl\alpha^2,$$

$$v_1^2 = 2gl(1 - \cos\alpha') = gl\alpha'^2,$$

soit

$$\frac{\alpha'^2}{\alpha^2} = \frac{v_1^2}{V^2}, \qquad \text{d'où} \qquad \alpha' = \alpha\frac{v_1}{V} = \frac{\alpha}{2}.$$

3° Pendule circulaire.

a) Vitesse angulaire. — Plaçons-nous dans un repère lié au pendule et faisons le bilan des forces qui s'exercent sur la bille (*fig.* 2) : ce sont

$\vec{T}$, tension du fil,

$\vec{P}$, poids de la bille,

$\vec{F}$, force d'inertie centrifuge.

Ces trois forces s'équilibrent, donc la résultante $\vec{R}$ de $\vec{P}$ et $\vec{F}$ s'oppose à $\vec{T}$.

Or $P = R\cos\beta$ et $F = R\sin\beta$, d'où

$$\frac{F}{P} = \operatorname{tg}\beta.$$

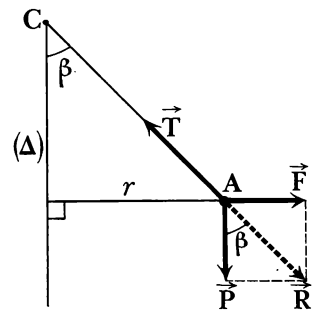


FIG. 2

Nous savons que $P = mg$ et d'autre part que $F = m\omega^2 r$, ω étant la vitesse angulaire de la bille et r le rayon du cercle qu'elle décrit. Il apparaît sur la figure 2 que $r = l\sin\beta$, et nous avons donc

$$\frac{m\omega^2 l\sin\beta}{mg} = \operatorname{tg}\beta,$$

d'où

$$\omega^2 = \frac{g}{l\cos\beta}$$

et, *numériquement*,

$$\omega = \sqrt{\frac{10}{0{,}4 \times 0{,}5}} = \sqrt{50} = 7{,}07\ \text{rd.s}^{-1}.$$

En considérant la relation $\omega^2 = \frac{g}{l\cos\beta}$, on constate que le fil ne peut s'écarter de la verticale que pour des valeurs de ω^2 supérieures à $\frac{g}{l}$. Lorsque ω^2 est inférieur à $\frac{g}{l}$, on a $\beta = 0$ et nous ne pouvons plus écrire cette relation, qui était le résultat d'une simplification par $\sin\beta$.

b) ***Tension du fil.*** – Considérons à nouveau la figure précédente : la tension du fil est équilibrée par la résultante $\vec{R}$ de $\vec{P}$ et $\vec{F}$. Nous avons donc

$$T = R = \frac{P}{\cos \beta} = \frac{mg}{\cos \beta}$$

et, *numériquement*,

$$T = \frac{0{,}3 \times 10}{0{,}5} = 6 \text{ N}.$$

4° Pendule circulaire avec fil de rappel.

a) ***Valeur minimale de la vitesse angulaire.*** – Lorsque les trois fils sont tendus, ACD est un triangle équilatéral. Pour des valeurs trop faibles de ω, α est inférieur à 60° et le fil AD ne sera pas tendu. Pour ω supérieur ou égal à la valeur conduisant à $\alpha = 60°$, le fil AD sera tendu.

Le cas limite correspond donc précisément à l'application numérique de la question précédente. La vitesse angulaire minimale pour que AD soit tendu est donc $\omega_0 = 7{,}07 \text{ rd.s}^{-1}$.

b) ***Tensions des fils.*** – Désignons par $\vec{T}$ et $\vec{T}'$ les tensions respectives des fils AC et AD.

Dans un référentiel lié au système et tournant avec lui autour de CD, la masse m est en équilibre sous l'effet de son poids $\vec{P}$, des tensions $\vec{T}$ et $\vec{T}'$ et de la force d'inertie axifuge $\vec{P}$, d'où

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{T}' + \vec{F} = \vec{0}.$$

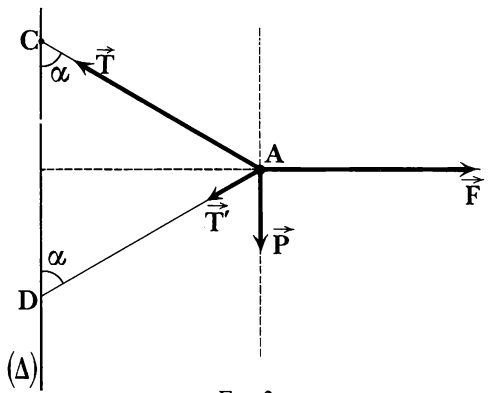


FIG. 3

Nous allons résoudre analytiquement le problème en projetant $\vec{T}$ et $\vec{T}'$ suivant les axes définis par $\vec{F}$ et $\vec{P}$ (*fig.* 3).

– Suivant la direction de $\vec{F}$:

$$T \sin \alpha + T' \sin \alpha = F.$$

— Suivant la direction de $\vec{P}$:

$$T \cos \alpha - T' \cos \alpha = P.$$

Nous savons que

$$P = mg \qquad \text{et que} \qquad F = m\omega^2 r,$$

avec

$$\omega = 2\omega_0, \qquad \omega_0^2 = \frac{g}{l \cos \alpha} \qquad \text{et} \qquad r = l \sin \alpha.$$

D'autre part, on a $\alpha = 60°$. On a donc

$$T - T' = \frac{P}{\cos \alpha} = \frac{mg}{\cos \alpha}$$

et

$$T + T' = \frac{F}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} \times m \frac{4g}{l \cos \alpha} l \sin \alpha = \frac{4mg}{\cos \alpha}.$$

Il vient donc

$$T = \frac{5}{2} \frac{mg}{\cos \alpha} \qquad \text{et} \qquad T' = \frac{3}{2} \frac{mg}{\cos \alpha}$$

et, *numériquement*,

$$T = \frac{5}{2} \times \frac{0.3 \times 10}{0,5} = 15 \text{ N}$$

et

$$T' = \frac{3}{2} \times \frac{0,3 \times 10}{0,5} = 9 \text{ N}.$$

8

1. – Théorèmes du mouvement du centre de gravité et de l'accélération angulaire. Application à un système composé de deux parties simples.

2. – Théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2 = W_{1\to 2}.$$

3. – *Moment cinétique.* Théorème du moment cinétique : $\dfrac{d\sigma}{dt} = \sum \mathcal{M}_{ext}$.

Conservation du moment cinétique dans un *choc mou.*

4. – Oscillations circulaires sous l'effet de *deux couples de rappel agissant simultanément* (pesanteur et spiral).

Un appareil est constitué d'un cylindre homogène, de rayon R, pouvant tourner autour de son axe de révolution (Δ). Une tige homogène AB de longueur $2l$, de milieu O, est fixée sur un diamètre du cylindre comme l'indique la figure. On notera J_0 le moment d'inertie du système (S) cylindre-tige par rapport à Δ et l'on négligera les frottements.

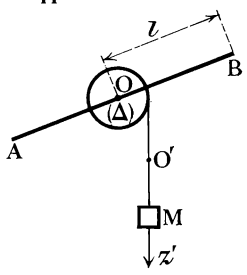


FIG. 1

Données :

R = 2,5 cm ; l = 20 cm.

1° Un fil de masse négligeable, enroulé sur le cylindre, est fixé par une de ses extrémités au cylindre et supporte à son autre extrémité une masse M dont les déplacements, verticaux, peuvent être repérés sur un axe O′z′ (*fig.* 1).

a) Donner l'expression de l'accélération de M en fonction de M, R, g et J_0.

b) S étant lâché sans vitesse initiale, la mesure donne pour un espace parcouru z = 0,20 m une durée t = 0,60 s. Sachant que M = 0,200 kg, vérifier que $J_0 = 10^{-3}$ kg.m^2.

2° On peut fixer sur AB, symétriquement par rapport à O, deux solides C et D, ayant chacun une masse m, qui seront supposés ponctuels (*fig.* 2).

a) Exprimer la nouvelle accélération γ de M en fonction de J_0, M, m, x = OC = OD, R et g.

b) Montrer qu'en faisant varier x, la grandeur $y = \dfrac{1}{\gamma}$ est une fonction affine de $X = x^2$.

Déterminer littéralement, puis numériquement, les coefficients a et b de la fonction $y = aX + b$. Données : m = 100 g, les autres valeurs sans changement.

c) On fixe maintenant $x = l$ = 0,20 m et l'on fait varier

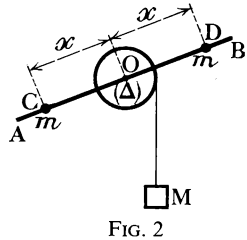


FIG. 2

la masse m de C et D. Montrer que l'on a une nouvelle fonction affine d'expression $y = a'm + b$ (réponse littérale)

3° On supprime le fil et l'on conserve une seule masse m en A. On impose au système à partir de sa position d'équilibre stable une rotation d'angle $\alpha_m = \frac{\pi}{2}$ radian et on l'abandonne sans vitesse initiale (*fig.* 3).

a) Quelle est la vitesse angulaire maximale du système ? Quelle est alors la vitesse linéaire v_A de m ?

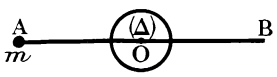


FIG. 3

b) A l'instant où la vitesse est maximale, une boule de pâte molle E supposée ponctuelle, de masse $m' = 50$ g, arrive horizontalement avec une vitesse $\vec{V}_E$ colinéaire à $\vec{V}_A$ mais de sens opposé. Le choc a lieu et la boule se fixe sur A.

Que doit valoir $\vec{V}_E$ pour que le système soit immobile à la fin du choc ?

4° E étant retirée, on relie le cylindre à une extrémité d'un ressort spiral dont l'effet est d'appliquer au cylindre un couple dont le moment a pour expression $\mathcal{M} = -C\alpha$, α étant l'angle de la tige avec Oz (*fig.* 4).

a) Le système étant écarté de sa position d'équilibre puis abandonné, étudier son mouvement en admettant que l'élongation angulaire α reste assez petite pour que l'on puisse confondre sin α et α.

Exprimer littéralement la période T du mouvement en fonction de C, J_0, m, g et l.

b) Exprimer littéralement la période T′ du mouvement que prend le système si l'on supprime le ressort spiral. Calculer T′.

c) Sachant que T = 0,90 s, calculer numériquement la valeur de C.

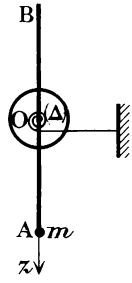


FIG. 4

N.B. – Dans tout le problème on pourra prendre l'accélération de la pesanteur $g = 10$ m.s^{-2} et $\pi^2 = 10$ et l'on considérera les questions 3° et 4° comme indépendantes du 1° et 2° en prenant $J_0 = 10^{-3}$ kg.m^2.

(Bacc. C et E. Montpellier, juin 1975)

1° *a*) Expression de l'accélération de la masse M. – La masse M se meut sous l'effet de son poids $M\vec{g}$ et de la tension $\vec{F}'$ du fil. L'accélération $\vec{\gamma}$ de son centre de gravité vérifie l'équation

$$M\vec{\gamma} = M\vec{g} + \vec{F}'$$

qui, en projections sur l'axe O′z′, donne la relation scalaire

$$(1) \qquad M\ddot{z}' = Mg - F'.$$

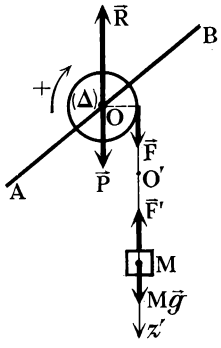


FIG. 1

Le système (S) est en rotation autour de l'axe (Δ) sous l'effet de son poids $\vec{P}$, de la réaction $\vec{R}$ de l'axe et de la tension $\vec{F}$ du fil.

Les moments par rapport à (Δ) de $\vec{P}$ et $\vec{R}$, appliquées sur l'axe, sont nuls. Le moment de $\vec{F}$ est $\mathfrak{M} = RF$ si l'on prend le sens positif de rotation correspondant au sens positif de O′z′ (*fig.* 1). Le théorème du moment cinétique donne l'expression de l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ du système (S) :

$$(2) \qquad J_0\ddot{\theta} = RF.$$

Le fil, de masse négligeable, transmet les tensions :

(3) $$F = F'.$$

Le fil est inextensible. Au déplacement $\Delta z'$ de M correspond une rotation $\Delta\theta$ de (S) telle que

$$R\,\Delta\theta = \Delta z'.$$

En divisant par la durée Δt correspondante, nous obtenons la relation $R\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{\Delta z'}{\Delta t}$ qui s'écrit $R\dot{\theta} = \dot{z}'$ si Δt tend vers zéro. En dérivant par rapport au temps, nous obtenons la relation

(4) $$R\ddot{\theta} = \ddot{z}'.$$

En éliminant F, F' et $\ddot{\theta}$ entre les équations (1), (2), (3) et (4), nous obtenons la projection $\ddot{z}'$ de $\vec{\gamma}$ sur $O'z'$:

$$\ddot{z}' = \frac{Mg}{M + \dfrac{J_0}{R^2}} = \text{Cte}.$$

***b*) Calcul de J_0.** — Le mouvement de M est uniformément accéléré, d'accélération $\ddot{z}' = \gamma_0 = \dfrac{Mg}{M + \dfrac{J_0}{R^2}}$. La vitesse initiale étant nulle, la vitesse à l'instant t est

$$\dot{z}' = \gamma_0 t$$

et l'espace parcouru à cet instant est $z = \dfrac{1}{2}\gamma_0 t^2$. Connaissant $t = 0{,}6$ s et $z = 0{,}2$ m, nous pouvons calculer $\gamma_0 = \dfrac{2z}{t^2}$, et ensuite J_0 :

$$J_0 = MR^2\left(\frac{gt^2}{2z} - 1\right).$$

Compte tenu des valeurs numériques, il vient

$$J_0 = 0{,}2 \times (2{,}5.10^{-2})^2\left(\frac{10 \times (0{,}6)^2}{2 \times 0{,}2} - 1\right) = 10^{-3}\ \text{kg.m}^2.$$

2° *a*) Nouvelle accélération γ de M. — L'adjonction des deux masses C et D modifie uniquement le moment d'inertie du système (S) qui devient

$$J = J_0 + 2mx^2.$$

L'accélération de la masse M s'écrit maintenant

$$\gamma = \frac{Mg}{M + \dfrac{1}{R^2}(J_0 + 2mx^2)}.$$

b) **Étude de la grandeur Y.** — Nous pouvons écrire

$$Y = \frac{1}{\gamma} = \frac{M + \frac{1}{R^2}(J_0 + 2mx^2)}{Mg},$$

soit

$$Y = \frac{M + \frac{J_0}{R^2}}{Mg} + \frac{2m}{R^2 Mg} x^2,$$

soit encore

$$Y = \frac{M + \frac{J_0}{R^2}}{Mg} + \frac{2m}{MR^2 g} X ;$$

Y est donc une fonction affine de X dont les coefficients sont

$$a = \frac{2m}{MR^2 g} = \frac{2 \times 0{,}1}{0{,}2 \times (2{,}5.10^{-2})^2 \times 10} = 160 \text{ SI}$$

et

$$b = \frac{M + \frac{J_0}{R^2}}{Mg} = \frac{0{,}2 + \frac{10^{-3}}{(2{,}5.10^{-2})^2}}{0{,}2 \times 10} = 0{,}9 \text{ SI}.$$

N.B. — On peut encore écrire

$$b = \frac{1}{\gamma_0} = \frac{t^2}{2z} = \frac{(0{,}6)^2}{2 \times 0{,}2} = 0{,}9 \text{ SI},$$

donc

$$Y = 160 X + 0{,}9 \text{ (SI)}.$$

c) **Variation de la masse *m*.** — Avec $x = l = 0{,}2$ m et m variable, nous avons

$$Y = \frac{1}{\gamma_0} + \frac{2l^2}{MR^2 g} m.$$

Nous conservons la constante $b = \frac{1}{\gamma_0} = 0{,}9$. La constante a' est

$$a' = \frac{2l^2}{MR^2 g} = \frac{2 \times (0{,}2)^2}{0{,}2 \times (2{,}5.10^{-2})^2 \times 10} = 64 \text{ (SI)}.$$

La nouvelle fonction affine est donc

$$Y = 64\, m + 0{,}9 \text{ (SI)}.$$

3° *a*) **Vitesse angulaire maximale du système.** — Lorsque la masse m vient en A tel que $(Oz, OA) = \alpha$, le poids $m\vec{g}$ de cette masse a produit le travail

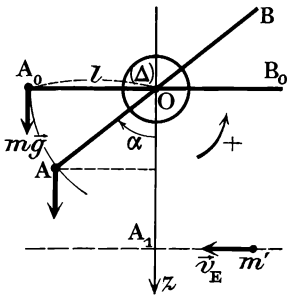


FIG. 2

$$W = mgl \cos \alpha \quad (fig.\ 2).$$

Le moment d'inertie du système est maintenant

$$J_1 = J_0 + ml^2$$

et son énergie cinétique est $\frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}^2$, en fonction de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$. L'énergie cinétique est nulle en A_0. D'après le théorème de l'énergie cinétique, nous avons l'équation

$$\frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}^2 - 0 = W = mgl \cos \alpha.$$

La vitesse angulaire du système est donc

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2mgl \cos \alpha}{J_1}} = \sqrt{\frac{2mgl \cos \alpha}{J_0 + ml^2}}.$$

La vitesse angulaire maximale est obtenue pour $\cos \alpha = 1$, soit $\alpha = 0$ (passage par la position d'équilibre). Sa valeur est

$$\dot{\theta}_{max} = \sqrt{\frac{2mgl}{J_0 + ml^2}} = \sqrt{\frac{2 \times 0{,}1 \times 10 \times 0{,}2}{10^{-3} + 0{,}1 \times (0{,}2)^2}},$$

soit

$$\dot{\theta}_{max} = 8{,}94 \text{ rd.s}^{-1}.$$

La vitesse v_A de m est alors

$$v_A = l\dot{\theta}_{max} = 0{,}2\dot{\theta}_{max} = 1{,}79 \text{ m.s}^{-1}.$$

b) **Valeur de $\vec{v}_E$ pour que le choc immobilise le système.** — Juste avant le choc, le moment cinétique par rapport à (Δ) du système (S) est

$$\sigma_1 = J_1 \dot{\theta}_{max} = \sqrt{2mgl(J_0 + ml^2)}.$$

Le moment cinétique de la masse m' est

$$\sigma_2 = -lm'v_E \qquad (\text{avec } v_E = |\vec{v}_E|),$$

le sens positif de rotation autour de (Δ) étant celui de la figure 2 (sens du mouvement de (S)).

Le moment cinétique total est $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$. Pendant le choc, les seules forces extérieures sont le poids $\vec{P} + m\vec{g}$ du système (S) et le poids $m'\vec{g}$ de la boule E. Or, pendant le choc, tous ces poids sont appliqués sur l'axe Oz, qui est leur support commun, et leurs moments par rapport à (Δ) sont nuls. D'après le théorème du moment cinétique, nous avons l'équation $\frac{d\sigma}{dt} = \Sigma \mathfrak{M}_{ext} = 0$ qui montre que le

moment cinétique total reste constant au cours du choc. Si ce moment est nul juste après le choc, il était donc nul juste avant le choc, donc

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 0$$

et nous en déduisons le module de la vitesse $\vec{v}_E$:

$$v_E = \frac{1}{lm'}\sqrt{2mgl(J_0 + ml^2)}.$$

Numériquement, il vient

$$v_E = \frac{1}{0{,}2 \times 0{,}05}\sqrt{2 \times 0{,}1 \times 10 \times 0{,}2(10^{-3} + 0{,}1 \times (0{,}2)^2)} = 4{,}472 \text{ m.s.}^{-1}.$$

4° *a)* Mouvement du système. — Le système cylindre-tige-masse m, de moment d'inertie

$$J_1 = J_0 + ml^2,$$

se meut sous l'effet du poids $\vec{P}$ de l'ensemble cylindre-tige, appliqué en O, de la réaction $\vec{R}$ de l'axe, appliquée en O, du poids $m\vec{g}$ appliqué en A et du couple de torsion exercé par le spiral.

Pour l'élongation α (*fig.* 3), les moments par rapport à Δ de $\vec{P}$ et $\vec{R}$ sont nuls. Le moment du poids $m\vec{g}$ est $-mgl \sin \alpha$ et le moment du couple de torsion du spiral est $-C\alpha$.

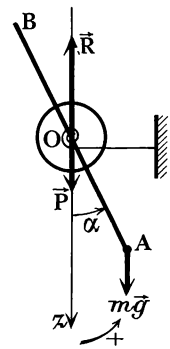


FIG. 3

L'accélération angulaire $\ddot{\alpha}$ du système est définie par l'équation

$$(J_0 + ml^2)\ddot{\alpha} = -mgl \sin \alpha - C\alpha,$$

qui, pour de petites oscillations, prend la forme

$$(J_0 + ml^2)\ddot{\alpha} = -(mgl + C)\alpha.$$

L'élongation α est donc une fonction sinusoïdale du temps : $\alpha = A \cos(\omega t + \varphi)$ de pulsation

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl + C}{J_0 + ml^2}}.$$

La vitesse angulaire à l'instant t est

$$\dot{\alpha} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi).$$

A l'instant $t = 0$, nous avons les conditions initiales

$$\alpha_0 = A \cos \varphi, \qquad \dot{\alpha}_0 = 0 = -A\omega \sin \varphi,$$

qui définissent les constantes A et φ.

Nous obtenons les couples de solutions

$$(\varphi_1 = 0, A_1 = \alpha_0) \qquad \text{et} \qquad (\varphi_2 = \pi, A_2 = -\alpha_0)$$

qui conduisent aux expressions

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega t) \qquad \text{et} \qquad \alpha = -\alpha_0 \cos(\omega t + \pi).$$

Ces deux expressions sont équivalentes et nous pouvons garder la plus simple :

$$\alpha = \alpha_0 \cos\left(t \sqrt{\frac{mgl + C}{J_0 + ml^2}}\right).$$

Période du mouvement. – Cette période est

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + ml^2}{mgl + C}}.$$

***b*) Période T′ sans le spiral.** – Il suffit d'annuler la constante de torsion C dans l'expression de T :

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + ml^2}{mgl}}.$$

Numériquement, il vient

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{10^{-3} + 0{,}1 \times (0{,}2)^2}{0{,}1 \times 10 \times 0{,}2}} = 0{,}993 \text{ s} \approx 1 \text{ s} \quad \text{si} \quad \pi = \sqrt{10}.$$

***c*) Calcul de la constante de torsion.** – Nous connaissons T = 0,9 s. Formons le rapport $\frac{T'^2}{T^2}$. Il vient

$$\frac{T'^2}{T^2} = \frac{mgl + C}{mgl} = 1 + \frac{C}{mgl}.$$

Nous en déduisons

$$C = mgl\left(\frac{T'^2}{T^2} - 1\right) = mgl\left(\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{J_0 + ml^2}{mgl} - 1\right),$$

soit encore

$$C = \frac{4\pi^2(J_0 + ml^2)}{T^2} - mgl.$$

Numériquement, il vient

$$C = \frac{4 \times 10(10^{-3} + 0{,}1 \times (0{,}2)^2)}{(0{,}9)^2} - 0{,}1 \times 10 \times 0{,}2 = 4{,}69.10^{-2} \text{ m.N.rd}^{-1}.$$

9

1. – Chute libre. *Rencontre de deux billes.*
2. – Quantité de mouvement et énergie cinétique. Conservation au cours d'un choc élastique.
3. – Théorème de l'accélération angulaire.
4. – Théorème de l'énergie cinétique.
5. – *Application simultanée des théorèmes du centre de gravité, de l'accélération angulaire et de l'énergie cinétique* pour calculer les réactions de l'axe d'un pendule.

A) Deux billes A et B assimilables à des points matériels ont respectivement pour masses

$$m_1 = 0{,}1 \text{ kg} \qquad \text{et} \qquad m_2 = 0{,}3 \text{ kg}.$$

Elles sont disposées sur une même verticale à 0,4 m l'une de l'autre, A au-dessus de B. A l'instant $t = 0$, on lâche A sans vitesse initiale. Quand A a parcouru 0,2 m, on lâche B sans vitesse initiale.

1° Écrire les équations des mouvements de A et B en prenant pour origine des espaces le point de départ de A et pour origine des temps le moment de ce départ.

2° A quel instant le choc entre A et B aura-t-il lieu ?

3° En admettant que le choc soit parfaitement élastique (conservation de l'énergie cinétique), calculer les vitesses de A et B juste après le choc. (Les vitesses avant et après le choc sont colinéaires.)

B) Les deux billes A et B sont maintenant fixées aux deux extrémités d'une tige rectiligne de masse négligeable, de longueur $2l = 1$ m, pouvant tourner dans un plan vertical autour d'un axe horizontal passant par le milieu O de AB. Les frottements sont négligeables.

1° On écarte ce pendule pesant de sa position d'équilibre stable d'un angle de 0,05 radian et on l'abandonne sans vitesse initiale à la date $t = 0$.

Quelle est la nature du mouvement? (La démonstration est exigée.) Calculer l'élongation angulaire et la vitesse angulaire du pendule à la date $t = 2{,}3$ s.

2° La tige AB est disposée verticalement, B au-dessus de A. On l'écarte légèrement de la verticale et on l'abandonne sans vitesse initiale.

Calculer son accélération angulaire et sa vitesse angulaire lors de son premier passage à l'horizontale.

Calculer à cet instant les composantes γ_N et γ_T du vecteur accélération du centre de gravité et les composantes horizontale et verticale de la réaction de l'axe sur la tige. Faire un schéma.

N.B. – On utilisera dans tout le problème $g = 10$ m.s^{-2} et $\pi^2 = 10$. Les parties A), B), 1° et B), 2° sont indépendantes.

(Bacc. C et E. Grenoble, septembre 1974)

A) Chutes libres.

1° *Équations.* – Nous affecterons systématiquement de l'indice 1 toutes les variables attachées à A et de l'indice 2 toutes celles attachées à B.

A quitte l'origine en chute libre à l'instant $t = 0$. Si nous orientons l'axe vertical vers le bas, sa cote z_1 aura pour expression

$$z_1 = \frac{1}{2} g t^2.$$

Le mouvement de B aura lui aussi pour accélération g et sera de la forme

$$z_2 = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + z_0,$$

où deux paramètres nous sont inconnus.

Nous savons de plus qu'à un certain instant t_0 la bille B occupe une certaine position z'_2, ce qui est insuffisant, et nous devrons écrire en plus l'expression de la vitesse de B et considérer qu'à l'instant t_0 du lâcher, elle est nulle. Cette méthode, quoique générale, est un peu lourde. Il est plus simple de considérer qu'à l'instant t_0 la bille B commence une chute libre à l'altitude z'_2, soit

$$z_2 - z'_2 = \frac{1}{2} g (t - t_0)^2.$$

Il est facile de calculer la valeur de t_0, connaissant la valeur de la cote z_1 de A à cet instant. Nous avons toujours $t = \sqrt{\frac{2z_1}{g}}$.

En développant l'expression de z_2,

$$z_2 = \frac{1}{2} g t^2 - g t_0 t + \frac{1}{2} g t_0^2 + z'_2$$

et, en appelant z'_1 la position de A à l'instant t_0,

$$z_2 = \frac{1}{2} g t^2 - \sqrt{2 g z'_1}\, t + z'_1 + z'_2$$

et, *numériquement*,

$$z_2 = \frac{1}{2} 10 t^2 - \sqrt{2 \times 10 \times 0{,}2}\, t + 0{,}2 + 0{,}4 = 5t^2 - 2t + 0{,}6 \text{ (mètres)};$$

d'autre part,

$$z_1 = 5t^2 \text{ (mètres)}.$$

2° *Instant du choc.* – Les dimensions des billes étant négligeables, l'instant du choc correspond à $z_1 = z_2$, soit

$$5t^2 = 5t^2 - 2t + 0{,}6,$$

d'où

$$t = \frac{0{,}6}{2} = 0{,}3 \text{ s}.$$

Il convient de vérifier si cet instant est postérieur à l'instant t_0 de lâcher de B.

Nous avons

$$t_0 = \sqrt{\frac{2z_1'}{g}},$$

soit

$$t_0 = \sqrt{\frac{2 \times 0{,}2}{10}} = 0{,}2 \text{ s}.$$

Le choc a bien lieu après le lâcher de B.

3° ***Bilan du choc.*** —Le choc sera supposé suffisamment bref pour que l'impulsion du poids des billes soit négligeable pendant qu'il a lieu. Les vitesses des billes avant le choc ont pour expression

$$v_1 = 10t, \qquad v_2 = 10t - 2.$$

Juste avant le choc, nous avons $t \approx t_0 = 0{,}3$ s et

$$v_1 = 10 \times 0{,}3 = 3 \text{ m.s}^{-1},$$
$$v_2 = 10 \times 0{,}3 - 2 = 1 \text{ m.s}^{-1}.$$

Il y a conservation de la quantité de mouvement, soit

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2',$$

v_1' et v_2' désignant les vitesses de A et B après le choc. De plus, le choc étant élastique, l'énergie cinétique se conserve, soit

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2.$$

Classiquement, nous multiplierons cette dernière équation par 2 et la diviserons membre à membre par la première après avoir regroupé les termes en m_1 à gauche et les termes en m_2 à droite. Nous obtenons le système

$$m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2),$$
$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2'.$$

La résolution nous donne

$$v_1' = \frac{2m_2 v_2 - v_1(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2},$$

soit

$$v_1' = \frac{2 \times 0{,}3 \times 1 - 3(0{,}3 - 0{,}1)}{0{,}3 + 0{,}1} = 0 \text{ m.s}^{-1}$$

et la deuxième équation

$$v_2' = v_1' + v_1 - v_2 = 0 + 3 - 1 = 2 \text{ m.s}^{-1}.$$

B) Pendule pesant

1° ***Oscillations de faible amplitude.*** — Les positions d'équilibre du pendule sont telles que le moment résultant des poids de A et B par rapport à l'axe soit nul.

Les positions verticales conviennent. Nous vérifierons en écrivant les équations que l'équilibre stable correspond à A au-dessus de B.

Calculons le moment résultant des poids de A et B pour une élongation α à partir de la position que nous avons définie (*fig.* 1). Le moment du poids de B a un effet de rappel, nous l'écrivons

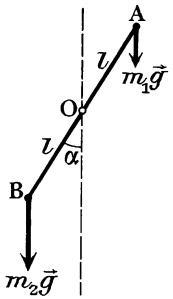


FIG. 1

$$\mathfrak{M}_B = - m_2 gl \sin \alpha.$$

Celui de A tend à écarter le pendule de la verticale, nous l'écrirons

$$\mathfrak{M}_A = m_1 gl \sin \alpha.$$

Le moment résultant est

$$\mathfrak{M} = - (m_2 - m_1) gl \sin \alpha.$$

Compte tenu des valeurs numériques de m_1 et m_2, il a bien un effet de rappel et l'équilibre est stable.

Appliquons au système le théorème de l'accélération angulaire, en remarquant que le moment d'inertie du pendule est $J = (m_1 + m_2)l^2$.

D'autre part, l'élongation initiale étant faible, nous supposerons (et vérifierons *a posteriori*) que l'élongation reste toujours faible.

Nous avons donc

$$- (m_2 - m_1) gl\alpha = (m_1 + m_2) l^2 \alpha'',$$

soit

$$\alpha'' = - \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \cdot \frac{g}{l} \alpha.$$

Nous reconnaissons l'équation d'un mouvement oscillatoire sinusoïdal de pulsation

$$\omega = \sqrt{\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \cdot \frac{g}{l}},$$

soit, *numériquement*,

$$\omega = \sqrt{\frac{0{,}3 - 0{,}1}{0{,}3 + 0{,}1} \cdot \frac{10}{0{,}5}} = \sqrt{10} \approx 3{,}16 \text{ rd.s}^{-1}.$$

α a pour expression

$$\alpha = \alpha_0 \cos (\omega t + \varphi)$$

et la vitesse angulaire

$$\alpha' = - \alpha_0 \omega \sin (\omega t + \varphi);$$

pour

$$t = 0, \qquad \alpha' = 0 \qquad \text{et} \qquad \alpha = 0{,}05 \text{ rd}.$$

Nous en déduisons que $\varphi = 0$ et $\alpha_0 = 0{,}05$ rd.

(Remarquons au passage que l'élongation angulaire ne sera jamais supérieure à $\alpha_0 = 0{,}05$ rd et que l'hypothèse faite est justifiée.)

L'expression de α est donc

$$\alpha = 0{,}05 \cos \sqrt{10}\, t$$

et celle de α'

$$\alpha' = -0{,}05 \sqrt{10} \sin \sqrt{10}\, t \quad \text{(SI)}.$$

Compte tenu des approximations des hypothèses,

$$2{,}3 \sqrt{10} \approx \frac{7\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \bmod 2\pi.$$

A l'instant $t = 2{,}3$ s, nous avons donc

$$\alpha \approx 0{,}05 \cos \frac{\pi}{3} = 0{,}025 \text{ rd}$$

et

$$\alpha' \approx -0{,}05 \sqrt{10} \sin \frac{\pi}{3} \approx 0{,}137 \text{ rd.s}^{-1}.$$

2° ***Mouvement à partir de l'équilibre instable.*** —En prenant pour origine des élongations angulaires la position d'équilibre instable, l'accélération angulaire, d'après le théorème du même nom, sera

$$\alpha'' = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \cdot \frac{g}{l} \sin \alpha.$$

Pour $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, nous aurons donc

$$\alpha'' = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \cdot \frac{g}{l} = \frac{0{,}3 - 0{,}1}{0{,}3 + 0{,}1} \cdot \frac{10}{0{,}5} = 10 \text{ rd.s}^{-2}.$$

Pour calculer la vitesse angulaire, écrivons la conservation de l'énergie totale. La vitesse initiale étant nulle, la variation d'énergie cinétique est

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} J\alpha'^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) l^2 \alpha'^2.$$

La variation d'énergie potentielle est

$$\Delta E_P = \Delta E_{P_A} + \Delta E_{P_B} = m_1 gl - m_2 gl.$$

Nous avons donc

$$(m_1 - m_2) gl + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) l^2 \alpha'^2 = 0,$$

soit

$$\alpha' = \sqrt{\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \cdot \frac{2g}{l}} = \sqrt{10 \times 2} \approx 4{,}47 \text{ rd.s}^{-1}.$$

Compte tenu des masses de A et B, le centre de gravité G du pendule est trois fois plus près de B que de A. Il est donc au milieu de OB.

L'accélération radiale γ_n vaut

$$\gamma_n = \alpha'^2 \frac{l}{2},$$

car G décrit un cercle de rayon $\frac{l}{2}$.

Numériquement, $\gamma_n = 20 \times \frac{0{,}5}{2} = 5 \text{ m.s}^{-2}$.

L'accélération tangentielle γ_t vaut

$$\gamma_t = \alpha'' \frac{l}{2} = 10 \times \frac{0{,}5}{2} = 2{,}5 \text{ m.s}^{-2}.$$

Appliquons au pendule le théorème du centre de gravité en décomposant les forces et accélérations sur un axe horizontal et un axe vertical.

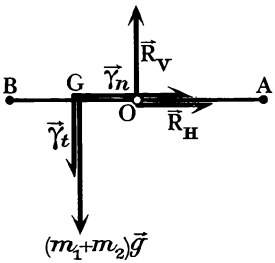


FIG. 2

La résultante F des forces exercées sur le pendule doit être telle que

$$\vec{F} = (m_1 + m_2)\vec{\gamma}.$$

Horizontalement, en appelant R_H et R_V les réactions de l'axe :

$$R_H = (m_1 + m_2)\gamma_n.$$

Verticalement, en orientant l'axe vers le bas,

$$(m_1 + m_2)g + R_V = (m_1 + m_2)\gamma_t.$$

Numériquement,

$$R_H = (0{,}3 + 0{,}1)5 = 2 \text{ N},$$

$$R_V = (0{,}3 + 0{,}1)(2{,}5 - 10) = -3 \text{ N}.$$

R_H est dirigée vers la droite, comme γ_n.
R_V est dirigée vers le haut.

10

1. – *Cinématique du roulement sans glissement.*
2. – Théorèmes du centre de gravité et de l'accélération angulaire, ce dernier étant appliqué à la *rotation autour d'un axe de direction fixe passant par le centre de gravité.*
3. – Théorème de l'énergie cinétique pour un solide en *rotation et translation simultanées*

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 ; \quad E_2 - E_1 = W_{1\to 2}.$$

4. – *Énergie potentielle élastique d'un ressort.*
5. – Choc avec conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique.

A) On considère une bille sphérique de masse M = 0,1 kg et de rayon R = 2 cm. Son moment d'inertie par rapport à l'un de ses diamètres est $J = \frac{2}{5}MR^2$. On l'abandonne sans vitesse initiale au sommet d'un plan incliné faisant un angle $\alpha = 30°$ avec le plan horizontal. On prendra $g = 9{,}8\ m/s^2$.

1° On suppose l'absence de tout frottement : la bille glisse alors sans rouler (1). Calculer l'accélération $\vec{\gamma}$ de son centre de gravité.

2° En réalité il y a des frottements et la bille roule sans glisser.

***a*) Calculer alors l'accélération de son centre de gravité, le travail des forces mis en jeu étant réduit au travail des forces de pesanteur.**

***b*) Calculer la vitesse V du centre de la bille à la base du plan incliné, au moment où elle aborde un plan horizontal H après un parcours de 1,12 m.**

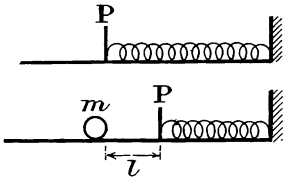
B) Sur ce plan horizontal H est disposé un ressort pouvant être utilisé en compression, ou en traction. L'une de ses extrémités est fixe, l'autre est solidaire d'un plateau P pouvant se déplacer sans frottement suivant la direction de l'axe du ressort.

Ce ressort s'allonge ou se raccourcit proportionnellement aux forces appliquées à raison de 1 cm pour une force de 0,5 N.

1° Établir que l'expression littérale de son énergie potentielle élastique est $E_p = \frac{1}{2}Kl^2$ pour une compression *l* comptée à partir de la position d'équilibre, K étant la raideur du ressort.

2° Après avoir été comprimé de $l = 7$ cm, le ressort se détend brusquement. Le plateau P vient frapper une bille de masse $m = 70$ g, immobile, placée à la position d'équilibre du plateau (voir figure).

(1) Cela revient à dire qu'on admet ici que les billes ne peuvent tourner sur elles-mêmes ; elles se comportent comme des points matériels qui glissent sans frottement sur le plan H.



En supposant que toute l'énergie potentielle initiale du ressort est entièrement communiquée à la bille, calculer la vitesse V_2 du centre de gravité de la bille qui part en roulant sans glisser.

C) Les deux billes de masse M et *m* sont considérées maintenant comme ponctuelles et sont animées sur le plan horizontal H des vitesses V_1 et V_2 précédemment calculées ([1]). Elles arrivent suivant la même direction mais en sens contraire et se heurtent dans un choc élastique où les vitesses avant et après restent colinéaires.

Calculer les vitesses des deux masses après le choc et préciser leur sens.

(Bacc. C et E. Besançon, juin 1972)

A. — 1° Accélération du centre de la bille glissant sans rouler. — Le centre de gravité de la bille se meut comme un point matériel de masse M soumis au poids Mg et à la réaction normale $\vec{N}$ du plan (pas de frottement) ; son accélération $\vec{\gamma}$ est donnée par la relation

$$M\vec{\gamma} = M\vec{g} + \vec{N}.$$

En projection sur l'axe Ox descendant, ayant la direction de la ligne de plus grande pente, nous avons

$$M\gamma = Mg \sin \alpha, \qquad \text{soit} \qquad \gamma = g \sin \alpha.$$

Avec $g = 9{,}8$ m/s^2 et $\alpha = 30°$, il vient

$$\gamma = 9{,}8 \times 0{,}5 = 4{,}9 \text{ m/s}^2.$$

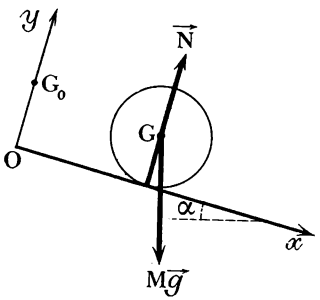


FIG. 1

2° *a*) Accélération du centre de la bille roulant sans glisser. — L'action de contact du plan sur la bille comporte une composante normale $\vec{N}$ et une composante tangentielle $\vec{T}$ qui s'oppose au glissement du point A de la bille en contact avec le plan.

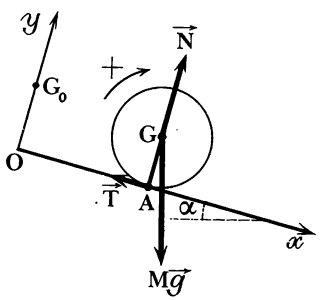


FIG. 2

L'accélération γ du centre de gravité est donnée par la relation

$$M\vec{\gamma} = M\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}.$$

En projection sur l'axe Ox, il vient

$$(1) \qquad M\gamma = Mg \sin \alpha - T.$$

En projection sur l'axe Oy, ascendant, normal au plan incliné, nous avons

$$(2) \qquad 0 = N - Mg \cos \alpha.$$

Prenons comme sens positif des rotations celui de l'angle $(Oy, Ox) = \frac{\pi}{2}$. Le théorème de l'accélération angulaire s'applique à la rotation autour d'un axe de

direction fixe passant par le centre de gravité. Autour de cet axe, normal au plan de figure, l'accélération angulaire de la bille est θ'', et son moment d'inertie est $J = \frac{2}{5} MR^2$.

Les moments de la réaction $\vec{N}$ et du poids $M\vec{g}$, qui rencontrent l'axe, sont nuls.

Le moment de la réaction tangentielle $\vec{T}$ est RT. Il vient

$$J\theta'' = \frac{2}{5} MR^2\theta'' = RT. \tag{3}$$

A l'instant t, le point A de la bille est en contact avec le point A′ du plan (*fig.* 3). A l'instant $t + \Delta t$, le point B de la bille est en contact avec le point B′ du plan. La bille a tourné d'un angle $\Delta\theta = (\overrightarrow{G_2B}, \overrightarrow{G_2A})$ tandis que son centre de gravité subissait le déplacement $\Delta x = \overline{G_1G_2} = \overline{A'B'}$.

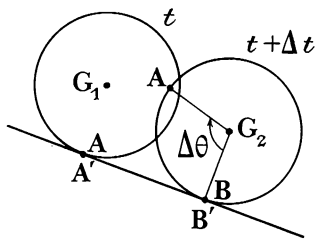


FIG. 3

Le roulement s'effectue sans glissement si la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est égale à la longueur A′B′ parcourue sur le plan. Cette condition s'écrit

$$\overset{\frown}{AB} = R \,.\, \Delta\theta = \overline{A'B'} = \overline{G_1G_2} = \Delta x.$$

En divisant par la durée Δt du déplacement, il vient

$$R \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

En passant à la limite si $\Delta t \to 0$, nous obtenons la relation

$$R \frac{d\theta}{dt} = \frac{dx}{dt}, \qquad \text{soit} \qquad R\theta' = v,$$

entre la vitesse angulaire θ' et la vitesse v du centre de gravité. Une nouvelle dérivation par rapport au temps donne la relation $R\theta'' = \gamma$ entre l'accélération angulaire θ'' de la bille et l'accélération γ du centre de gravité.

Compte tenu de cette relation, l'équation (3) devient

$$\frac{2}{5} M\gamma = T. \tag{4}$$

En éliminant T entre les équations (1) et (4), nous obtenons l'expression de l'accélération γ du centre G :

$$\frac{7}{5} M\gamma = Mg \sin\alpha, \qquad \text{soit} \qquad \gamma = \frac{5}{7} g \sin\alpha.$$

Numériquement, il vient

$$\gamma = \frac{5}{7} \times 9{,}8 \times 0{,}5 = 3{,}5 \text{ m/s}^2.$$

Autre solution. — L'énergie cinétique de la bille est la somme de l'énergie cinétique du centre de gravité affecté de la masse totale $\left(\frac{1}{2}Mv^2\right)$, et de l'énergie cinétique de rotation autour d'un axe de direction fixe, normal au plan de figure, et passant par G $\left(\frac{1}{2}J\theta'^2\right)$; donc

$$E = \frac{1}{2}(Mv^2 + J\theta'^2).$$

Compte tenu des expressions $J = \frac{2}{5}MR^2$ et $\theta' = \frac{v}{R}$, nous obtenons $E = \frac{7}{10}Mv^2$.

Lorsque la bille, initialement au repos, subit un déplacement $\overline{G_0G} = x$, son énergie cinétique subit la variation

$$\Delta E = E - 0 = \frac{7}{10}Mv^2.$$

Cette variation est égale à la somme des travaux des forces agissant sur la bille.

Le travail du poids est

$$W = M\vec{g} \cdot \overrightarrow{G_0G} = Mgx \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

soit

$$W = Mgx \sin \alpha.$$

Les réactions $\vec{T}$ et $\vec{N}$ s'appliquent à chaque instant au seul point de la bille qui soit au repos, puisque le point A de la bille en contact avec le plan ne glisse pas. Les travaux de $\vec{T}$ et $\vec{N}$ sont donc nuls. Nous avons l'équation

$$\frac{7}{10}Mv^2 = Mgx \sin \alpha.$$

Une dérivation par rapport au temps donne l'équation

$$\frac{7}{10}M \cdot 2v\frac{dv}{dt} = Mg\frac{dx}{dt}\sin \alpha.$$

Avec $v = \frac{dx}{dt}$, $\gamma = \frac{dv}{dt}$ et, toutes réductions faites, il vient

$$\frac{7}{5}\gamma = g \sin \alpha, \qquad \text{soit} \qquad \gamma = \frac{5}{7}g \sin \alpha.$$

***b)* Vitesse du centre de la bille à la base du plan incliné.** — Ce centre effectue un mouvement rectiligne uniformément accéléré, de vitesse initiale nulle. La vitesse acquise après le parcours d'une distance x est

$$V_1 = \sqrt{2\gamma x} = \sqrt{2 \times 3{,}5 \times 1{,}12} = 2{,}8 \text{ m/s}.$$

B. — 1° Énergie potentielle élastique du ressort comprimé. — Cette énergie est égale au travail que fournit le ressort lorsqu'il revient à sa position d'équilibre en repoussant un obstacle en contact avec son extrémité libre.

Rapportons le mouvement du plateau P à un axe Ox parallèle à l'axe du ressort, de sens positif dirigé dans le sens de la détente, et dont l'origine coïncide avec la position d'équilibre P_0 du plateau P. Lorsque le ressort est comprimé, l'abscisse du plateau P est $-l$.

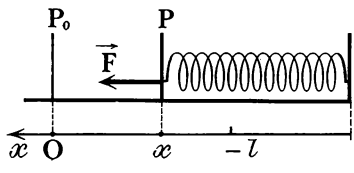


FIG. 4

Lorsque l'abscisse du plateau prend la valeur x ($x < 0$), le ressort exerce, dans le sens positif, la poussée

$$F = -Kx.$$

Au cours d'un très petit déplacement Δx, la force F reste sensiblement constante et le ressort fournit le travail élémentaire $\Delta w = F\,\Delta x = -Kx\,\Delta x$.

Le travail total est la somme de ces travaux élémentaires lorsque x varie de $-l$ à 0 :

$$W = \Sigma(-Kx\,\Delta x) = \int_{-l}^{0} -Kx\,dx.$$

Nous obtenons

$$W = \left| -\frac{Kx^2}{2} \right|_{x=-l}^{x=0} = \frac{Kl^2}{2}.$$

L'énergie potentielle du ressort comprimé est donc

$$E_p = \frac{1}{2} Kl^2.$$

2° Vitesse V_2 du centre de la bille lancée par le ressort. — L'énergie cinétique $E = \frac{7}{10} mV_2^2$ de la bille est égale à l'énergie potentielle du ressort comprimé :

$$\frac{7}{10} mV_2^2 = \frac{1}{2} Kl^2,$$

donc

$$V_2 = \sqrt{\frac{5}{7}\frac{Kl^2}{m}} = l\sqrt{\frac{5K}{7m}}.$$

Avec $l = 7$ cm $= 7.10^{-2}$ m, K = 0,5 N/cm = 50 N/m et $m = 70$ g $= 7.10^{-2}$ kg, il vient

$$V_2 = 7.10^{-2}\sqrt{\frac{5 \times 50}{7 \times 7.10^{-2}}} = \sqrt{2,5} = 1,58 \text{ m/s}.$$

C. — Vitesses des deux masses après le choc. — Soit $x'Ox$ le support commun de tous les vecteurs vitesse, le sens positif de cet axe étant identique à celui de $\vec{V}_1$ (*fig.* 5).

Juste avant le choc, la quantité de mouvement du système des deux billes admet, sur l'axe $x'x$, la projection

$$p_1 = MV_1 + mV_2,$$

avec $V_1 = 2,8$ m/s et $V_2 = -1,58$ m/s.

L'énergie cinétique du système est

$$E_1 = \frac{1}{2} MV_1^2 + \frac{1}{2} mV_2^2.$$

Juste après le choc, les vitesses des masses deviennent V_1' et V_2'. La quantité de mouvement est

$$p_2 = MV_1' + mV_2'$$

et l'énergie cinétique s'écrit

$$E_2 = \frac{1}{2} MV_1'^2 + \frac{1}{2} MV_2'^2.$$

Au cours d'un choc élastique, la quantité de mouvement et l'énergie cinétique se conservent :

$$p_2 = p_1 ; \qquad E_2 = E_1.$$

Nous avons les équations :

$$MV_1' + mV_2' = MV_1 + mV_2, \tag{5}$$

$$MV_1'^2 + mV_2'^2 = MV_1^2 + mV_2^2, \tag{6}$$

que nous pouvons écrire

$$M(V_1' - V_1) = m(V_2 - V_2'), \tag{7}$$

$$M(V_1'^2 - V_1^2) = m(V_2^2 - V_2'^2). \tag{8}$$

Nous devons rejeter la solution évidente $V_1' = V_1$, $V_2' = V_2$, qui correspond à l'absence de choc (les deux billes devraient se traverser sans que leurs mouvements soient modifiés).

Divisons le premier membre de (8) par $M(V_1' - V_1)$, quantité non nulle par hypothèse, et le second membre de (8) par la quantité égale $m(V_2 - V_2')$. Il vient

$$V_1' + V_1 = V_2 + V_2'. \tag{9}$$

La résolution du système formé par les équations (7) et (9) donne les racines

$$V_1' = \frac{V_1(M - m) + 2mV_2}{M + m} ;$$

$$V_2' = \frac{2MV_1 - (M - m)V_2}{M + m}.$$

Compte tenu des valeurs numériques, il vient

$$V_1' = \frac{2{,}8(0{,}1 - 0{,}07) - 0{,}14 \times 1{,}58}{0{,}17} = - 0{,}807 \text{ m/s}$$

et

$$V_2' = \frac{2 \times 0{,}1 \times 2{,}8 + (0{,}1 - 0{,}07) \times 1{,}58}{0{,}17} = + 3{,}573 \text{ m/s}.$$

La bille M recule dans le sens négatif tandis que la bille m est lancée dans le sens positif.

11

1. – Théorèmes du mouvement du centre de gravité et de l'accélération angulaire.
2. – Théorème de l'énergie cinétique.
3. – Conservation du moment cinétique d'un système isolé.
4. – Division d'un système en parties simples dont l'une comporte deux *treuils* de sens opposés et de *rayons inégaux*.
5. – Application *simultanée* de la force d'inertie et du théorème du moment cinétique.

A) A un cylindre homogène (D) de rayon R, de masse M, sont accolés de part et d'autre deux cylindres homogènes (D_1) et (D_2) de rayon r, de même masse m ; les axes des trois cylindres sont confondus.

Calculer le moment d'inertie de l'ensemble (E) ainsi formé par rapport à l'axe de ces cylindres. (On rappelle que le moment d'inertie d'un cylindre homogène par rapport à son axe est égal à la moitié du produit de sa masse par le carré de son rayon.)

Application numérique : $M = 1{,}50\ kg$; $R = 0{,}10\ m$; $r = \frac{R}{2}$; $m = \frac{M}{2}$.

B) L'ensemble (E) est suspendu à un point fixe O par le point A, centre de l'une des faces latérales, par l'intermédiaire d'un fil d'acier de constante de torsion C, il est ainsi en équilibre, l'axe des cylindres étant colinéaire à OA (*fig.* 1).

OA restant vertical, on fait tourner l'ensemble (E) d'un certain angle α_m autour de l'axe commun, et on le libère sans vitesse initiale.

1° Montrer que (E) prend un mouvement sinusoïdal de rotation, dont on calculera la période T en fonction de M, R et C.

2° Calculer la constante de torsion C, sachant que la durée de vingt oscillations est 48 secondes.

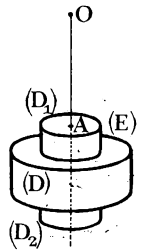


FIG. 1

C) L'ensemble (E) est maintenant suspendu par un point B de la périphérie du cylindre (D), de telle façon que son axe soit horizontal ; le point B est relié à un point fixe O par un fil inextensible sans raideur et sans masse, de longueur l. L'ensemble est écarté de sa

position d'équilibre d'un petit angle, l'axe de (E) restant perpendiculaire au plan décrit par OB, et abandonné sans vitesse initiale *(fig. 2)*.

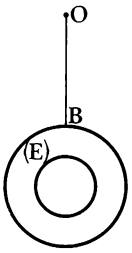


FIG. 2

1° Donner l'expression de la période des oscillations de faible amplitude du pendule ainsi constitué.

On rappelle le théorème de Huygens :

$$J_\Delta = J_G + md^2,$$

expression dans laquelle J_Δ est le moment d'inertie du système par rapport à l'axe (Δ), J_G est le moment d'inertie par rapport à l'axe parallèle à (Δ) et passant par G, centre de gravité du système, m est la masse du système et d est la distance entre les deux axes.

Application numérique : $l = 0{,}40$ m.

2° On écarte à nouveau ce pendule de sa position d'équilibre d'un angle $\alpha = 60°$, et on l'abandonne, l'axe des cylindres restant perpendiculaire au plan d'oscillation.

Déterminer la tension du fil OB lors du passage par la position d'équilibre.

D) L'ensemble (E) est mobile sans frottement autour d'un axe vertical (Δ) confondu avec l'axe des cylindres ; la face supérieure de (D) porte deux petites sphères homogènes, de même masse $m_0 = \dfrac{M}{30}$, disposées symétriquement par rapport à (Δ) *(fig. 3)* ; les deux sphères sont assujetties à se déplacer sans frottement suivant un diamètre de (D) et sont sollicitées chacune par un ressort de rappel fixé en leur centre d'une part, et à l'axe (Δ) d'autre part, chaque ressort, de constante de raideur k, a pour longueur à vide, r rayon de (D_1). Les centres des sphères sont d'abord maintenus à la distance r de (Δ), un couple moteur entraîne l'ensemble avec une vitesse angulaire ω_1, puis on supprime ce couple au moment précis où on libère les sphères.

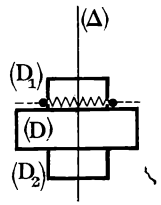


FIG. 3

Quelle doit être la vitesse angulaire ω_1 pour que les deux sphères, toujours maintenues par les ressorts, prennent une position d'équilibre relatif telle que leur centre reste à la distance R de (Δ) ?

Application numérique : $k = 60\ \text{N.m}^{-1}$.

E) L'ensemble (E) initial peut maintenant tourner autour de l'axe (Δ) maintenu horizontal. Deux fils inextensibles, sans raideur, de masse négligeable, sont attachés l'un sur (D), l'autre sur (D_1) et enroulés en sens contraire, à spires jointives, sur la périphérie de ceux-ci.

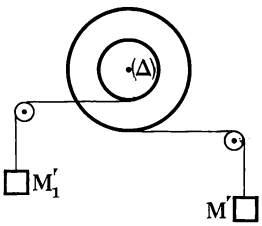


FIG. 4

Ils passent sur des poulies de masses négligeables, d'axes horizontaux parallèles à (Δ) et portent des masses M′ et M'_1.

1° Quelle relation doit exister entre M′ et M'_1 pour que le dispositif soit en équilibre ?

2° On choisit maintenant $M'_1 = M'$. Déterminer en négligeant tout frottement la nature du mouvement de l'ensemble (E) lorsqu'on abandonne le système sans vitesse.

Application numérique : $M' = 1{,}00$ kg ; $g = 9{,}8\ \text{m.s}^{-2}$.

3° On détermine l'accélération de la masse M′ et l'on trouve $\gamma = 1{,}96\ \text{m.s}^{-2}$. Il existe donc un couple de frottement qui freine la rotation de l'ensemble (E). Déterminer le moment de ce couple.

(Séries C et E. Dijon. septembre 1975)

A) Moment d'inertie. — Les trois cylindres ayant même axe de révolution, le moment d'inertie de (E) est la somme des moments d'inertie des trois cylindres par rapport à leur axe commun, soit

$$J = \frac{1}{2}MR^2 + 2\left(\frac{1}{2}mr^2\right);$$

en sachant que $m = \frac{M}{2}$ et $r = \frac{R}{2}$, il vient

$$J = \frac{1}{2}MR^2 + 2\left(\frac{1}{2}\frac{M}{2}\frac{R^2}{4}\right) = \frac{5}{8}MR^2.$$

Numériquement,

$$J = \frac{5}{8} \times 1{,}5 \times (0{,}1)^2 = 9{,}375.10^{-3}\ \text{kg.m}^2.$$

B) Pendule de torsion.

1° *Mouvement.* — Lorsque le solide (E) est écarté de sa position d'équilibre (que nous prendrons comme origine des élongations angulaires) d'un angle α, il subit de la part du fil un couple de rappel de moment $\mathcal{M} = -C\alpha$ de signe contraire à celui de l'élongation (couple de rappel).

La tension du fil et le poids de (E), dirigés suivant l'axe de rotation, ont des moments nuls et nous pouvons appliquer à (E) le théorème de l'accélération angulaire qui conduit à la relation

$$\mathcal{M} = J\alpha'',$$

soit $\qquad -C\alpha = J\alpha'' \qquad$ ou $\qquad \alpha'' = -\frac{C}{J}\alpha.$

Nous obtenons donc l'équation d'un mouvement oscillatoire sinusoïdal de rotation, de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{C}{J}}$ et de période $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}}$, soit encore

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{5}{8}\frac{MR^2}{C}} = \pi\sqrt{\frac{5}{2}\frac{MR^2}{C}}.$$

2° *Constante de torsion.* — L'équation ci-dessus nous permet d'exprimer C en fonction des données :

$$C = \frac{5}{2}\frac{\pi^2 MR^2}{T^2}.$$

Numériquement, avec $T = \frac{48}{20} = 2{,}4$ s,

$$C = \frac{5}{2}\frac{\pi^2 1{,}5 \times (0{,}1)^2}{(2{,}4)^2},$$

soit

$$C \approx 6{,}43.10^{-2}\ \text{m.N.rd}^{-1}.$$

C) Pendule pesant.

1° ***Oscillations de faible amplitude.*** – En l'absence de spécification contraire, nous considérerons dans toute cette partie que le centre de gravité G de (E) reste dans l'alignement de OB, l'ensemble (E) + fil se comportant donc comme un système rigide.

Nous appellerons θ l'élongation angulaire de OB, mesurée à partir de la verticale, dans le plan décrit par le fil. Le système est soumis à deux forces, le poids de (E) et la réaction de O. Seul le poids de (E) a un moment non nul de module

$$| \mathcal{M} | = (M + m + m)g(l + R) \sin | \theta |.$$

Ce moment ayant un effet de rappel sur le système, nous pouvons écrire algébriquement, avec $m = \frac{M}{2}$,

$$\mathcal{M} = - 2Mg(l + R) \sin \theta$$

et, θ restant petit,

$$\mathcal{M} \approx - 2Mg(l + R)\theta.$$

Pour appliquer le théorème de l'accélération angulaire, nous allons calculer J_0, moment d'inertie de (E) par rapport à l'axe du pendule :

$$J_0 = J + (M + m + m)(l + R)^2 = J + 2M(l + R)^2.$$

Nous aurons donc $\mathcal{M} = J_0\theta''$, soit

$$- 2Mg(l + R)\theta = [J + 2M(l + R)^2]\theta'',$$

soit encore

$$\theta'' + \frac{2Mg(l + R)}{J + 2M(l + R)^2}\theta = 0.$$

Nous obtenons l'équation différentielle d'une fonction sinusoïdale de pulsation

$$\omega = \sqrt{\frac{2Mg(l + R)}{J + 2M(l + R)^2}}$$

et de période

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J + 2M(l + R)^2}{2Mg(l + R)}} = 2\pi \sqrt{\frac{9{,}375 \cdot 10^{-3} + 3(0{,}4 + 0{,}1)^2}{3 \times 9{,}8(0{,}4 + 0{,}1)}}$$

Il vient $T = 1{,}43$ s.

2° ***Oscillation de grande amplitude.*** – Nous pouvons écrire que l'augmentation d'énergie cinétique du système entre le lâcher et la position d'équilibre est égale au travail des forces extérieures [ici le poids de (E)] pendant la descente [en effet aucune autre forme d'énergie n'est mise en jeu ici du point de vue de (E) seul]. L'énergie cinétique du pendule animé de la vitesse angulaire θ' est $E_C = \frac{1}{2} J \cdot \theta'^2$.

Le travail du poids de (E) est

$$W = 2Mg(l + R)(1 - \cos \alpha).$$

La vitesse angulaire θ'_0 au passage à l'équilibre est donc telle que

$$\frac{1}{2}[J + 2M(l + R)^2]\theta'^2_0 = 2Mg(l + R)(1 - \cos \theta).$$

Si $\vec{\mathcal{T}}$ est la tension du fil à la position d'équilibre, l'accélération centripète (normale) responsable du mouvement circulaire du centre de gravité de (E) est $\vec{\gamma}$ telle que

$$\vec{\mathcal{T}} + 2\,M\vec{g} = 2M\vec{\gamma}.$$

En modules, en considérant les sens des vecteurs,

$$T = 2M(g + \gamma).$$

γ est liée à la vitesse angulaire θ'_0 par la relation

$$\gamma = \theta'^2_0 \rho,$$

ρ étant le rayon de la trajectoire du centre de gravité, soit $\rho = l + R$. Nous avons donc finalement

$$\mathcal{T} = 2M\left[g + \frac{4Mg(l + R)^2(1 - \cos \theta)}{J + 2M\,(l + R)^2}\right].$$

Numériquement,

$$\mathcal{T} = 3 \times 9{,}8\left[1 + \frac{4 \times 1{,}5 \times (0{,}5)^2(1 - 0{,}5)}{9.375.10^{-3} + 3 \times (0{,}5)^2}\right] = 58{,}4\ \text{N}.$$

D) Système en rotation. — Au même instant t_1 (où la vitesse angulaire est ω_1), on supprime le couple moteur et on libère les deux sphères. Donc, à partir de l'instant t_1, le système est *isolé* et son moment cinétique reste constant par rapport à l'axe (Δ).

Par contre, les sphères ne peuvent pas rester à la distance r de l'axe (Δ), car elles sont sollicitées par une force centrifuge $m_0 r\omega_1^2$ qui tend à les écarter de l'axe. Si les sphères se stabilisent sur une trajectoire circulaire de rayon R, avec une nouvelle vitesse angulaire ω_2, la nouvelle valeur $m_0 R\omega_2^2$ de la force centrifuge équilibre exactement la tension $k(R - r)$ de l'un des ressorts. Donc

$$m_0 R\omega_2^2 = k(R - r) \qquad \text{et} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k(R - r)}{m_0 R}}.$$

Entre l'instant t_1 et l'instant t_2 où l'équilibre s'établit avec la vitesse angulaire ω_2, le moment cinétique du système est demeuré constant $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$, avec $J_1 = J + 2m_0 r^2$ et $J_2 = J + 2m_0 R^2$. Nous avons donc

$$\omega_1 = \frac{J_2}{J_1}\omega_2 = \frac{J + 2m_0 R^2}{J + 2m_0 r^2}\sqrt{\frac{k(R - r)}{m_0 R}}.$$

Numériquement, avec $m_0 = \frac{M}{30} = \frac{1,5}{30} = 0,05$ kg,

$$\omega_1 = \frac{9,375 \,.\, 10^{-3} + 2 \times 0,05 \times (0,1)^2}{9,375 \,.\, 10^{-3} + 2 \times 0,05 \times (0,05)^2} \sqrt{\frac{60 \times 0,05}{0,05 \times 0,1}}.$$

Il vient $\omega_1 = 26,4$ rd.s^{-1}.

E) Montage de type « Machine d'Atwood ».

1° ***Équilibre.*** – Les fils et les poulies sans masse transmettent intégralement les poids des masses M′ et M′$_1$ à la périphérie des cylindres (D) et (D$_1$).

Si le corps (E) reste immobile c'est que les moments des forces agissant sur lui s'annulent. Les seules forces ayant un moment non nul sont les tensions des fils, agissant en sens inverse. Nous aurons donc

$$M'_1 gr = M' g R$$

et, en sachant que $r = \frac{R}{2}$,

$$M'_1 \frac{R}{2} = M'R \qquad \text{ou} \qquad \frac{M'_1}{M'} = 2.$$

2° ***Mouvement sans frottement.*** – Soit z la cote de M′ mesurée à partir de la position de départ, positivement vers le bas, z_1 celle de M′$_1$, comptée positivement vers le haut, et α l'angle de (E) avec la position de départ, compté positivement en même temps que z.

Appliquons à (E) le théorème de l'accélération angulaire et à M′ et M′$_1$ le théorème du mouvement du centre de gravité. T et T$_1$ désigneront les modules des tensions des fils supportant M′ et M′$_1$.

Il vient

$$M'g - T = M'\gamma, \qquad -M'_1 g + T_1 = M'_1 \gamma_1$$

et

$$TR - T_1 r = J\alpha''.$$

Les caractéristiques géométriques du système nous donnent

$$z = \alpha R, \qquad \text{d'où} \qquad \gamma = \alpha'' R$$

et

$$z_1 = \alpha r, \qquad \text{d'où} \qquad \gamma_1 = \alpha'' r = \alpha'' \frac{R}{2}.$$

Nous pouvons rassembler les trois équations en une :

$$M'(g - \alpha'' R)R - M'_1 \left(\alpha'' \frac{R}{2} + g\right)\frac{R}{2} = \frac{5}{8} MR^2 \alpha''$$

et, avec $M' = M'_1$,

$$M'g = \frac{5}{2}\left(M' + \frac{M}{2}\right) R\alpha''.$$

α'' est donc constant et le mouvement de (E) est circulaire uniformément accéléré, d'accélération angulaire

$$\alpha'' = \frac{4}{5} \frac{M'}{2M' + M} \frac{g}{R},$$

soit, *numériquement*,

$$\alpha'' = \frac{4}{5} \times \frac{1}{2 \times 1 + 1{,}5} \times \frac{9{,}8}{0{,}1} = 22{,}4 \text{ rd.s}^{-2}.$$

3° ***Couple de frottement.*** — La valeur de α'' correspondant au γ trouvé est $\alpha'' = \frac{\gamma}{R} = \frac{1{,}96}{0{,}1} = 19{,}6 \text{ rd.s}^{-2}$, il y a donc en effet un freinage. Soit Γ le couple de frottement, le théorème de l'accélération angulaire pour (E) s'écrit alors

$$TR - T_1 \frac{R}{2} - \Gamma = J\alpha''.$$

Et une résolution parallèle à celle du 2° nous conduit à

$$\Gamma = \frac{R}{2}\left[M'g - \frac{5}{4} R\alpha''(M + 2M')\right],$$

soit, *numériquement*,

$$\Gamma = \frac{0{,}1}{2}\left[1 \times 9{,}8 - \frac{5}{4} \times 1{,}96(1{,}5 + 2)\right],$$

en remarquant que $R\alpha'' = \gamma$, soit

$$\Gamma = 6{,}125.10^{-2} \text{ m.N.}$$

12

1. – Théorèmes du mouvement du centre de gravité et de l'accélération angulaire.
2. – Solution proposée : *application du théorème du moment cinétique* $\left(\frac{d\sigma}{dt} = \sum \mathcal{M}_{ext.}\right)$ *à l'ensemble d'une machine d'Atwood.*
3. – Théorème de l'énergie cinétique.

Une « machine d'Atwood » se compose d'une poulie homogène, de diamètre 100 mm, mobile sans frottement autour d'un axe horizontal (Δ), et de deux solides de masses M = 115 g et m = 100 g, reliés par un fil souple, inextensible, de masse négligeable, passant sur la poulie. Les solides seront assimilés à des points matériels, M et m désignant à la fois les points et leurs masses. On désigne par J le moment d'inertie de la poulie par rapport à l'axe (Δ).

A) L'ensemble est immobilisé par un support placé sous le corps M. En faisant basculer ce support, on libère l'ensemble sans vitesse initiale.

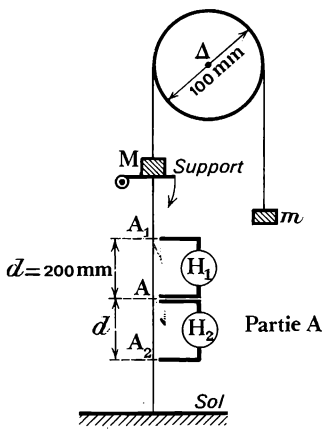
1° Montrer que les mouvements de translations rectilignes verticaux de M et m sont uniformément accélérés.

Calculer l'accélération γ de ces mouvements en fonction de M, m et J.

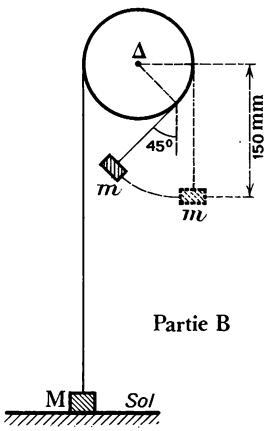
Calculer numériquement la valeur qu'aurait γ si l'on pouvait négliger J.

On donne $g = 9{,}80\ \text{m.s}^{-2}$.

2° Pour mesurer γ, on utilise deux horloges H_1 et H_2 ; H_1 mesure la durée θ_1 qui s'écoule entre les passages de M aux points A_1 et A distants de d = 200 mm ; H_2 mesure la durée θ_2 qui



Partie A



Partie B

s'écoule entre les passages de M aux points A et A_2 distants de $d = 200$ mm. Les résultats de mesures sont $\theta_1 = 0{,}259$ s et $\theta_2 = 0{,}224$ s. Exprimer par une formule littérale, γ en fonction de θ_1, θ_2, d.

Calculer numériquement γ.

Calculer J.

3° M arrive au contact du sol 0,325 s après être passé au point A. Calculer l'altitude par rapport au sol du support immobilisant M avant le départ. (On pourra d'abord calculer la durée qui s'écoule entre le départ et le passage de M en A.)

B) La masse M et la poulie sont immobilisées. La masse *m* est suspendue par un brin de fil dont la longueur extérieure à la poulie est 150 mm lorsqu'il est vertical. On déplace *m* en maintenant le fil de suspension tendu et orthogonal à Δ, dans le sens qui enroule ce fil sur la poulie, sans qu'il glisse sur la poulie. Lorsque l'inclinaison du fil par rapport à la verticale est 45°, on abandonne *m* sans vitesse, *m* décrit alors une trajectoire plane, dont le plan est orthogonal à Δ ; le fil est constamment normal à cette trajectoire.

Calculer les vitesses linéaire et angulaire de *m* lorsqu'il passe par sa position d'équilibre.

(Séries C et E. Maroc, juin 1976)

A) 1° Accélération des mouvements des solides. — Les forces *extérieures* agissant sur le système sont les poids $M\vec{g}$, $m\vec{g}$, $\vec{p}$ des deux masses et de la poulie, et la réaction $\vec{R}$ de l'axe de la poulie.

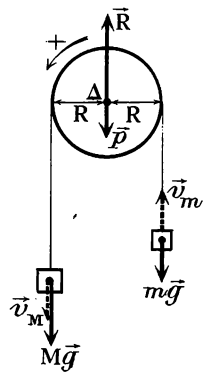


FIG. 1

Compte tenu du sens positif choisi sur la figure 1, le moment résultant de ces forces par rapport à l'axe (Δ) est

$$\mathfrak{M} = RMg - Rmg = Rg(M - m),$$

en désignant par R le rayon de la poulie.

Soit v la vitesse de chaque masse et ω la vitesse angulaire de la roue.

Les moments cinétiques par rapport à (Δ) sont

$$\sigma_1 = J\omega \quad \text{pour la roue,}$$
$$\sigma_2 = MRv \quad \text{pour la masse M,}$$
$$\sigma_3 = mRv \quad \text{pour la masse } m.$$

Le moment cinétique total est

$$\sigma = J\omega + (M + m)Rv.$$

Le fil est inextensible. Tous ses points ont la même vitesse v au même instant, y compris les points en contact avec la jante, dont la vitesse est $R\omega$. Nous avons la relation $v = R\omega$ qui permet d'exprimer σ en fonction de v :

$$\sigma = \left[\frac{J}{R} + (M + m)R\right]v.$$

Écrivons que la dérivée par rapport au temps du moment cinétique par rapport à Δ est égale au moment résultant par rapport à Δ des forces extérieures :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \left[\frac{J}{R} + (M + m)R\right]\frac{dv}{dt} = Rg(M - m).$$

Nous obtenons l'accélération des deux masses :

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = \frac{g(M - m)}{M + m + \dfrac{J}{R^2}}.$$

Si l'on pouvait négliger J, on trouverait, pour γ, la valeur

$$\gamma = \frac{9{,}80(0{,}115 - 0{,}100)}{0{,}115 + 0{,}100} = 0{,}684 \text{ m.s}^{-2}.$$

2° Mesure de γ. — La masse M est abandonnée sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$. Elle arrive en A à l'instant t, ayant parcouru l'espace $x = \frac{1}{2}\gamma t^2$. Elle est donc passée en A_1, à l'abscisse $x - d$, à l'instant $t - \theta_1$:

$$x - d = \frac{1}{2}\gamma(t - \theta_1)^2,$$

et elle passe en A_2, à l'abscisse $x + d$, à l'instant $t + \theta_2$:

$$x + d = \frac{1}{2}\gamma(t + \theta_2)^2.$$

La première et la seconde équation donnent

$$d = \frac{1}{2}\gamma t^2 - \frac{1}{2}\gamma(t - \theta_1)^2 = \frac{1}{2}\gamma(2t - \theta_1)\theta_1.$$

La première et la troisième donnent

$$d = \frac{1}{2}\gamma(t + \theta_2)^2 - \frac{1}{2}\gamma t^2 = \frac{1}{2}\gamma(2t + \theta_2) \cdot \theta_2.$$

Nous pouvons calculer t :

$$\frac{2d}{\gamma} = (2t - \theta_1)\theta_1 = (2t + \theta_2)\theta_2,$$

soit

$$t = \frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{2(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Nous obtenons ensuite γ en remplaçant $2t$ par sa valeur dans l'une ou l'autre des expressions de d :

$$d = \frac{1}{2}\gamma\theta_1\left(\frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{\theta_1 - \theta_2} - \theta_1\right),$$

soit

$$\gamma = \frac{2d}{\theta_1\theta_2} \cdot \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 + \theta_2}.$$

Numériquement,

$$\gamma = \frac{2 \times 0{,}2(0{,}259 - 0{,}224)}{0{,}259 \times 0{,}224(0{,}259 + 0{,}224)} = 0{,}499\,6 \approx 0{,}5 \text{ m.s}^{-2}.$$

Connaissant γ, nous pouvons calculer J :

$$J = R^2\left(\frac{g(M - m)}{\gamma} - M - m\right),$$

soit, *numériquement*, avec R = 0,05 m,

$$J = (0,05)^2\left(\frac{9,80(0,115 - 0,100)}{0,5} - 0,115 - 0,100\right),$$

soit $$J = 1,975.10^{-4}\ \text{kg.m}^2.$$

3° Altitude initiale du mobile M par rapport au sol. — La masse M arrive au point A à l'instant

$$t = \frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{2(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{(0,259)^2 + (0,224)^2}{2(0,259 - 0,224)} = 1,675\ \text{s}.$$

Elle arrive au sol à l'instant

$$T = t + 0,325 = 2\ \text{s}.$$

La hauteur de chute, depuis le départ à l'instant $t = 0$, est donc

$$H = \frac{1}{2}\gamma T^2 = \frac{1}{2} \times 0,5 \times 4 = 1\ \text{m}.$$

B) Vitesse de *m* au passage par l'équilibre. — La longueur totale du fil pendant en AB dans la position finale est $l = 0,15$ m.

Lorsque le système est dans la position initiale, une partie AC est enroulée sur la poulie le long d'un arc de rayon R = 0,05 m, d'angle au centre 45°

Cette longueur de fil est

$$\widehat{AC} = \frac{R\pi}{4} = \frac{0,05\pi}{4}.$$

La longueur du brin CD est donc

$$l - \frac{\pi R}{4}.$$

Projetons la ligne ACD sur un axe Δz vertical descendant.

La projection $\Delta C'$ de AC est égale à celle du rayon ΔC, soit

$$R \cos 45° = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

La projection du segment CD est CD cos 45°, soit

$$\left(l - \frac{\pi R}{4}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

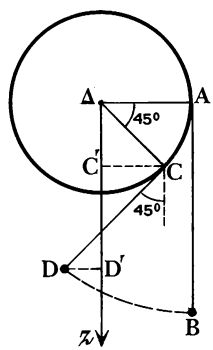


FIG. 2

Finalement, nous avons

$$\Delta D' = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(R + l - \frac{\pi R}{4}\right).$$

La hauteur de chute de la masse m est $AB - \Delta D'$, soit

$$h = l - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(R + l - \frac{\pi R}{4}\right).$$

Le poids de cette masse produit le travail mgh égal à la variation de l'énergie cinétique de la masse m, c'est-à-dire à sa valeur finale $\frac{1}{2}mv^2$, puisque la valeur initiale est nulle. Il vient

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh = mg\left[l - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(R + l - \frac{\pi R}{4}\right)\right],$$

soit

$$v = \sqrt{2g\left[l - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(R + l - \frac{\pi R}{4}\right)\right]}.$$

Numériquement, avec $g = 9{,}80\ \text{m.s}^{-2}$, $l = 0{,}15$ m et $R = 0{,}05$ m, nous obtenons

$$v = \sqrt{2 \times 9{,}8\left[0{,}15 - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(0{,}05 + 0{,}15 - \frac{\pi \times 0{,}05}{4}\right)\right]},$$

soit $v = 0{,}844\ \text{m.s}^{-1}$.

Au voisinage de la position d'équilibre, le centre de la masse m décrit un arc de rayon l. Sa vitesse angulaire est

$$\omega = \frac{v}{l} = \frac{0{,}844}{0{,}15} = 5{,}63\ \text{rd.s}^{-1}.$$

B. — Vibrations mécaniques

13

1. – Construction de Fresnel.
2. – *Onde progressive transversale dans une corde :* mouvement d'un point, aspect de la corde à l'instant t.
3. – *Observation stroboscopique d'une progression ralentie de l'onde.*
4. – Force électromagnétique (loi de Laplace) (cours de 1ère C, E).
5. – *Ondes stationnaires transversales :* tension de la corde permettant d'obtenir un puis deux fuseaux.

1° L'extrémité S d'une lame vibrante a un mouvement rectiligne vertical, sinusoïdal, de fréquence 100 Hz et d'amplitude totale 8 mm. L'origine des élongations de S est le milieu du segment ; le sens positif est ascendant ; l'origine des dates est un instant de passage de S à son amplitude maximale positive.

Écrire l'expression de l'élongation x, celle de la vitesse v et celle de l'accélération γ de S. Représenter vectoriellement par la méthode de Fresnel (vecteur tournant) x, v, γ à la date origine et à la date t_1 positive (la plus proche de la date origine) à laquelle S a l'élongation négative $-2\sqrt{3}$ mm et *se déplace dans le sens positif* ; déterminer cette date t_1 et les valeurs de v et γ à cette date.

2° A cette lame est attachée, en S, une corde élastique tendue horizontalement ; lorsque la lame vibre, seules des ondes transversales issues de S se propagent le long de la corde à la vitesse de 30 m/s.

a) Écrire l'équation du mouvement des points A et B tels que SA = 20 cm, SB = 65 cm. Comparer ces deux mouvements en utilisant la représentation vectorielle de Fresnel. L'amortissement est négligeable sur cette partie de la corde.

b) Les vibrations réfléchies à l'extrémité de la corde étant négligeables, représenter les élongations des différents points de celle-ci au temps $t = 1{,}002\ 5$ s. On se limitera aux 90 premiers centimètres.

c) Pour observer la corde à l'immobilité apparente, on utilise un stroboscope. Quelle doit être la fréquence des éclairs ? Calculer la plus grande fréquence possible. S'il y avait un éclair de moins par seconde, montrer que les ondes sembleraient se propager lentement ; préciser le sens de déplacement apparent et calculer la vitesse apparente de propagation.

3° La corde cylindrique, en cuivre, est maintenant tendue horizontalement entre deux points fixes M et N (le vibreur est supprimé). Entre M et N existe une différence de potentiel $U_{MN} = 0{,}90 \sin 100\,\pi t$ (volts).

Au milieu de la corde et sur une longueur totale de 10 cm s'exerce un champ magnétique uniforme ; l'induction magnétique est horizontale, permendiculaire à la corde et d'intensité 10^{-2} tesla.

a) Quelles sont les caractéristiques de la force électromagnétique s'exerçant sur la corde ? Donner l'expression de son intensité. Faire un croquis.

b) A quelle condition la corde vibrera-t-elle au maximum en un seul fuseau ? Calculer la tension F de la corde permettant d'obtenir ce résultat. En déplaçant le champ magnétique de telle sorte qu'il soit centré au quart de la longueur de la corde, comment pourrait-on faire vibrer la corde en deux fuseaux ?

***Données pour la question* 3°:**

longueur de la corde : MN = 90 cm,
masse linéaire de la corde : $\mu = 0{,}30$ g/m,
formule de la célérité des ondes : $V = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ (SI),
résistivité du cuivre : $\rho = 1{,}7.10^{-8}$ Ω.m,
aire de section droite de la corde : $s = 0{,}034$ mm^2.

N.B. – La troisième partie est indépendante des deux premières.

(Bacc. C et E. Bordeaux, septembre 1973)

1° Lame vibrante. – L'expression générale de l'élongation d'un mouvement sinusoïdal est

$$x = a \sin (\omega t + \varphi),$$

a étant l'amplitude, ω la pulsation qui vaut $2\pi\nu$ (où ν est la fréquence) et φ la phase à l'instant $t = 0$.

Dans ce cas particulier,

$$a = 4.10^{-3} \text{ m}, \qquad \omega = 200\pi \approx 628{,}3 \text{ rd.s}^{-1}$$

et φ doit être tel que, pour $t = 0$, $x = a$, soit

$$\sin \varphi = 1 \qquad \text{et} \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Nous garderons la valeur $\frac{\pi}{2}$ et écrirons

$$x = 4.10^{-3} \sin \left(200\pi t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Nous pouvons aussi utiliser l'expression

$$x = 4.10^{-3} \cos (200\pi t)$$

qui est totalement équivalente à la précédente.

La vitesse et l'accélération sont les dérivées première et seconde de x par rapport à t, soit en général

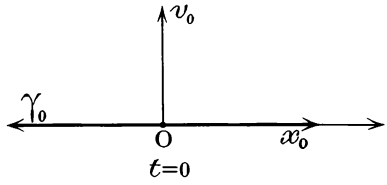
$$v = a\omega \cos (\omega t + \varphi) \qquad \text{et} \qquad \gamma = -a\omega^2 \sin (\omega t + \varphi).$$

Ici, nous aurons

$$v = -0{,}8\pi \sin (200\pi t) \qquad \text{et} \qquad \gamma = -160\pi^2 \cos (200\pi t).$$

Dans la représentation de Fresnel, chaque grandeur périodique est représentée par un vecteur dont le module est égal à l'amplitude de la grandeur et l'angle polaire égal à sa phase (*fig.* 1).

Pour des raisons de commodité de représentation, 4 mm, 0,8 π m.s^{-1} et $160\pi^2$ m.s^{-2} seront représentés par la même longueur. L'instant $t = 0$ ne présente aucune difficulté.



La valeur

$$x = -2\sqrt{3} \text{ mm}$$

correspond à

$$\cos(200\pi t) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

ce qui nous donne deux solutions :

$$200\pi t = \pi \pm \frac{\pi}{6} \text{ modulo } 2\pi.$$

Il nous reste à examiner le signe de la vitesse dans les deux cas.

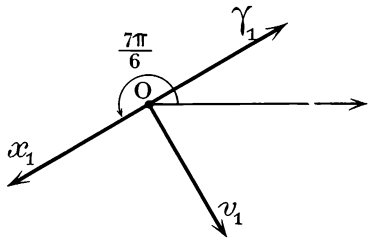


FIG. 1

Le signe moins donne

$$v = -0{,}8\pi \sin\frac{5\pi}{6} = -0{,}4\pi \text{ m.s}^{-1}.$$

Le signe plus donne de même

$$v = +0{,}4\,\pi \text{ m.s}^{-1}.$$

Nous retiendrons donc la solution $200\pi t = \frac{7\pi}{6}$ mod. 2π correspondant à $t_1 = 5{,}83.10^{-3}$ s.

Les valeurs de x, v et γ sont égales aux projections respectives des trois vecteurs représentatifs sur l'axe horizontal. Nous avons vu que

$$v = +0{,}4\pi \text{ m.s}^{-1} \approx 1{,}257 \text{ m.s}^{-1}$$

et

$$\gamma = 160\pi^2 \cos\frac{\pi}{6} = 80\pi^2\sqrt{3} \approx 1{,}368 \text{ m.s}^{-2}.$$

2° Corde vibrante.

a) Mouvements de deux points. — La corde étant parcourue par une onde progressive de célérité v, l'élongation d'un point d'abscisse y à l'instant t sera donnée par l'équation générale

$$x = a \sin\left[\omega\left(t - \frac{y}{v}\right) + \varphi\right],$$

et si nous conservons les conditions initiales du 1° pour la lame vibrante, cette équation se réduit à

$$x = a \cos \omega \left(t - \frac{y}{v} \right).$$

Numériquement,

– pour A :

$$x_A = 4.10^{-3} \cos 200\pi \left(t - \frac{0{,}2}{30} \right)$$

$$= 4.10^{-3} \cos \left(200\pi t - \frac{4\pi}{3} \right) = 4.10^{-3} \cos \left(200\pi t + \frac{2\pi}{3} \right);$$

– pour B :

$$x_B = 4.10^{-3} \cos 200\pi t \left(t - \frac{0{,}65}{30} \right) = 4.10^{-3} \cos \left(200\pi t - \frac{13\pi}{3} \right)$$

$$= 4.10^{-3} \cos \left(200\pi t - \frac{\pi}{3} \right).$$

Il apparaît clairement sur la représentation de Fresnel (*fig.* 2) que les deux mouvements considérés sont en opposition de phase. (L'examen des deux équations nous montrait aussi le déphasage de π existant entre x_A et x_B.)

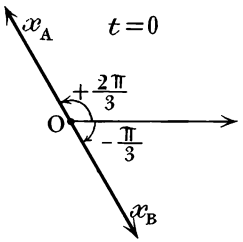


FIG. 2

b) Aspect de la corde à un instant donné.– Reprenons l'équation du mouvement de la corde

$$x = 4.10^{-3} \cos 200\pi \left(t - \frac{y}{30} \right).$$

Il suffit de faire $t = 1{,}002\ 5$ s pour avoir l'élongation x des différents points en fonction de leur abscisse y :

$$x = 4.10^{-3} \cos 2\pi \left(100{,}25 - \frac{y}{0{,}3} \right) = 4.10^{-3} \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2\pi \frac{y}{0{,}3} \right) = 4.10^{-3} \sin 2\pi \frac{y}{0{,}3}.$$

L'aspect de la corde sera celui d'une sinusoïde de période 30 cm, d'amplitude 4 mm, passant par l'origine avec une pente positive (*fig.* 3).

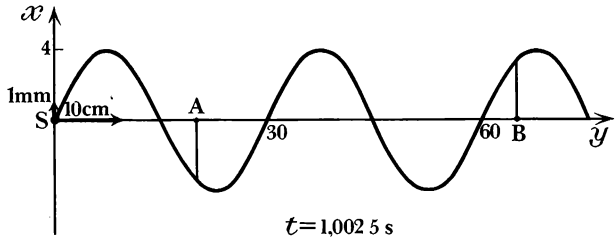


FIG. 3

c) ***Observation stroboscopique.*** — Dans le repère fixe yOx, l'équation de l'onde est

$$x = a \cos \omega \left(t - \frac{y}{v} \right).$$

Considérons le repère mobile $y_1O_1x_1$, animé de la vitesse v dans le sens des y positifs, et qui coïncide avec yOx à l'instant $t = 0$ (*fig.* 4).

Le point M, dont les coordonnées sont (x, y) dans le repère (O), possède les coordonnées

$$x_1 = x, \quad y_1 = y - vt,$$

dans le repère mobile (O_1). Donc,

$$\frac{y_1}{v} = \frac{y}{v} - t$$

et, rapportée au repère mobile $y_1O_1x_1$, l'équation d'un point de la corde est

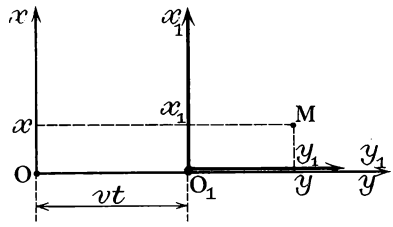


FIG. 4

$$x_1 = x = a \cos \omega \left(t - \frac{y_1}{v} - t \right) = a \cos \frac{\omega y_1}{v}.$$

Dans le repère mobile $(y_1O_1x_1)$, la corde dessine la sinusoïde *fixe* $x_1 = a \cos \omega \dfrac{y_1}{v}$.

L'ensemble dessiné en gras sur la figure 5 glisse donc, à la vitesse $v = 30$ m/s, le long de Oy.

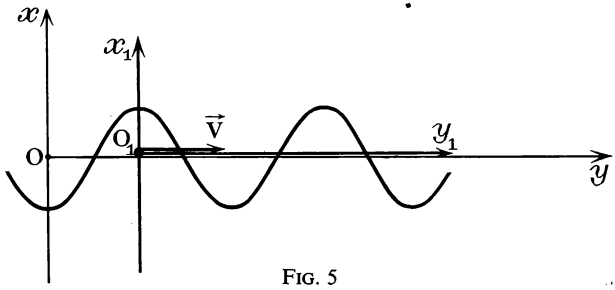


FIG. 5

Nous pouvons donc considérer l'avance de l'onde comme la progression vers les $y > 0$ d'une tige ayant la forme de la courbe $x_1 = a \cos \omega \dfrac{y_1}{v}$, avec la vitesse $v = 30$ m/s.

Nous savons que la distance entre deux points d'élongation maximale est $\lambda = VT = 0{,}3$ m.

Numérotons les crêtes, à partir de l'une d'elles : 1, 2, 3 ... Pour que la corde paraisse immobile, n'étant vue qu'aux instants $t_0 + kT_e$ des éclairs, il faut et il suffit que l'onde progresse d'un nombre entier n de longueurs d'ondes pendant la durée T_e qui sépare deux éclairs consécutifs ; donc

$$VT_e = n\lambda = nVT,$$

soit $T_e = nT$, ou $N_e = \frac{N}{n}$. La plus grande fréquence d'éclairement possible est donc obtenue pour $n = 1$:

$$N_e = N = 100 \text{ Hz}.$$

Supposons que la période de l'éclairement devienne

$$T_e = T + \varepsilon.$$

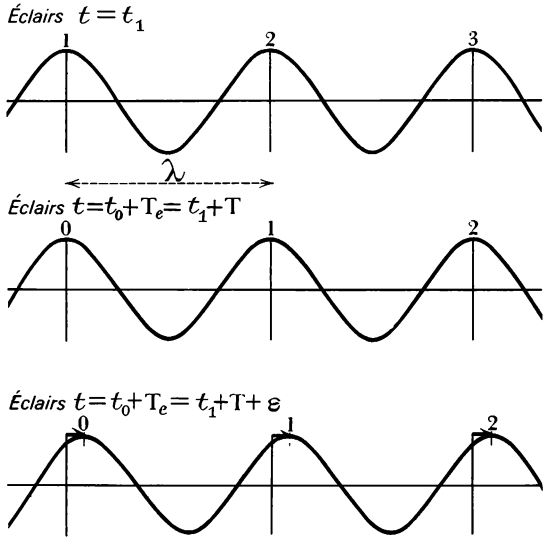


FIG. 6

Pendant ce temps, l'avance réelle de l'onde est

$$VT_e = VT + V\varepsilon$$

et l'avance *observable* ou *apparente* est $VT_e - VT = V\varepsilon$, car la partie $VT = \lambda$ de l'avance conduit de la figure 1 à la figure 2, tandis que la partie $V\varepsilon$ conduit à la figure 3, différente des deux autres, donc la *vitesse apparente* est

$$v_a = \frac{V\varepsilon}{T_e} = \frac{V(T_e - T)}{T_e} = V\left(1 - \frac{T}{T_e}\right) = V\left(1 - \frac{N_e}{N}\right).$$

Nous avions $N_e = N$ lorsque la vitesse apparente était nulle. Nous avons maintenant $N_e = N - 1$. La vitesse apparente est donc

$$v_a = V\left(1 - \frac{N - 1}{N}\right) = \frac{V}{N} = \frac{30}{100} = 0{,}30 \text{ m/s},$$

dans le sens positif, c'est-à-dire le sens réel de propagation.

N.B. — Si nous avions $N_e = N + 1$, il viendrait

$$v'_a = -\frac{V}{N} = -0{,}30 \text{ m/s}$$

et l'onde semblerait reculer.

3° Ondes stationnaires.

a) ***Force électromagnétique.*** — La force électromagnétique sera perpendiculaire à la fois au fil et au vecteur induction magnétique, c'est-à-dire verticale. Son sens est donné par exemple par la règle de l'observateur d'Ampère. Pour un sens donné du courant dans le fil, le schéma donne le sens de la force.

Le courant étant alternatif de fréquence 50 Hz, la force sera alternativement dirigée vers le haut et vers le bas 50 fois par seconde.

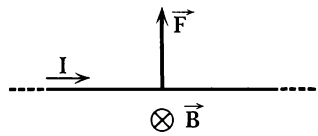


FIG. 7

Le courant parcourant le fil sera donné à chaque instant par la relation

$$i = \frac{U_{MN}}{R},$$

R, résistance du fil, valant $R = \rho \frac{MN}{S}$.

Numériquement,

$$i = \frac{0{,}90 \times 0{,}034 \times 10^{-6}}{1{,}7 \times 10^{-8} \times 0{,}9} \sin 100\pi t = 2 \sin 100\pi t \quad \text{(A)}.$$

L'induction étant perpendiculaire à la corde, le module de la force sera $F = Bil$, l étant la longueur soumise au champ magnétique, soit, *numériquement*,

$$F = 10^{-2} \times 2 \times 0{,}1 \sin 100\pi t = 2 \times 10^{-3} \sin 100\pi t \quad \text{(N)}.$$

La corde ne restant pas rectiligne quand la force agit, son point d'application est difficile à préciser. Il est sur la médiatrice de MN mais pas obligatoirement exactement sur la corde.

b) ***Ondes stationnaires.*** — La corde vibrera en un fuseau d'amplitude maximale si MN est égale à une demi-longueur d'onde pour la fréquence d'excitation.

Comme $\lambda = \frac{V}{\nu}$, il faudra que $MN = \frac{V}{2\nu} = \frac{1}{2\nu}\sqrt{\frac{F}{\pi}}$, d'où nous tirons

$$F = (2VMN)^2\mu = (2 \times 50 \times 0{,}9)^2 \times 0{,}30 \times 10^{-3} = 2{,}43 \text{ N}.$$

Pour que la corde vibre en deux fuseaux, il faudrait que MN soit égale à la longueur d'onde pour la fréquence d'excitation.

Nous aurions le choix entre doubler la fréquence ou diviser la tension par 4.

Si la fréquence est imposée par celle de la d.d.p. U_{MN}, il faut diviser la tension de la corde par 4 et lui donner la valeur $F' = 0{,}607\,5$ N.

14

1. – Ondes progressives transversales.

2. – Ondes stationnaires transversales.

3. – Théorème du mouvement du centre de gravité (expérience des ondes stationnaires effectuée dans un ascenseur) : variation de la longueur de corde permettant d'obtenir quatre fuseaux en fonction de l'accélératon de l'ascenseur.

A) L'extrémité supérieure A d'une corde élastique verticale est accrochée à un vibreur qui lui communique un mouvement entretenu, sinusoïdal, transversal, de fréquence $f = 100$ hertz et d'amplitude 3 mm. La corde est tendue par un corps accroché à son extrémité inférieure B. Pour supprimer la réflexion des ondes, le corps et la partie inférieure de la corde plongent dans l'eau.

1° Quelle est l'équation horaire du mouvement de l'extrémité A de la corde ? On comptera les élongations sur l'axe horizontal orienté $y'y$ sur lequel se déplace A. L'origine des élongations sur $y'y$ est la position de A lorsque le vibreur est au repos. L'origine des temps est choisie à un instant où l'élongation du point A est nulle et croissante.

2° La célérité des ondes le long de la corde est 25 m.s^{-1}. Calculer les élongations y_1 et y_2 d'un point M de la corde tel que AM $= d = 12{,}5$ cm, aux dates $t_1 = 0{,}100\,0$ s et $t_2 = 0{,}102\,5$ s. Quelle est la différence de phase entre ces deux élongations successives de M ?

3° Représenter l'aspect de la corde aux dates t_1 et t_2.

B) On réalise l'expérience de Melde dans un ascenseur : le vibreur est fixé au plafond de la cabine et, comme précédemment, un fil attaché en A au vibreur est tendu verticalement par un corps de masse m, accroché à son extrémité inférieure B ; le fil traverse en O une mince plaque horizontale qui peut être déplacée verticalement, ce qui permet de faire varier la longueur AO de la partie du fil située au-dessus de la plaque ; l'orifice O est suffisamment petit pour que les déplacements transversaux du fil en O soient impossibles.

1° Lorsque la cabine est au repos, le fil dessine, entre A et O, quatre fuseaux bien nets. L'équation horaire du mouvement d'un point C du fil tel que OC $= x$ est

$$y = 8.10^{-3}.\sin 5\,\pi x.\cos 200\,\pi t,$$

avec y et x en mètres, t en secondes.

a) Calculer la longueur AO.

b) Calculer la célérité des ondes le long du fil.

c) Calculer à la date $t = 6{,}25.10^{-2}$ s les vitesses des points C_1 et C_2 du fil tel que

$$x_1 = 5 \text{ cm} \qquad \text{et} \qquad x_2 = 35 \text{ cm}.$$

2° La cabine est maintenant animée d'un mouvement vertical ascendant uniformément accéléré, d'accélération $\vec{\gamma}_1$ de module 1,2 m.s^{-2}. Par quelle masse m_1 faut-il remplacer la

masse $m = 100$ g de la question précédente pour que le fil vibre en formant le même nombre de fuseaux ? On rappelle que la vitesse de propagation d'une onde le long d'un fil de tension F et de masse linéique μ est $V = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$.

On prendra $g = 9{,}8\ \text{m.s}^{-2}$.

3° Au lieu de changer la masse m accrochée en B, on peut modifier la longueur AO. De quelle hauteur h et dans quel sens faut-il déplacer la plaque pour observer les quatre fuseaux :

***a*) si le mouvement est ascendant uniformément accéléré, d'accélération $\gamma_1 = 1{,}2\ \text{m.s}^{-2}$;**

***b*) si le mouvement est ascendant uniformément décéléré d'accélération $\gamma_2 = 1{,}8\ \text{m.s}^{-2}$?**

(Séries C et E. Nantes. septembre 1975)

A) Ondes progressives.

1° *Équation horaire à l'origine.* — L'équation générale d'un mouvement vibratoire sinusoïdal est

$$y = a \sin(\omega t + \varphi) ;$$

a est l'amplitude du mouvement : ici $a = 3.10^{-3}$ m ; ω est la pulsation de celui-ci, soit $\omega = 2\pi f = 200\,\pi\ \text{rd.s}^{-1}$; φ est la phase à l'instant initial ; or la fonction $\sin \omega t$ est précisément nulle et croissante pour $t = 0$, nous avons donc $\varphi = 0 \pmod{2\pi}$.

L'équation horaire du mouvement de A est donc

$$y = 3.10^{-3} \sin 200\pi t \quad \text{(SI)}.$$

2° *Étude en un point donné.* — L'élongation du point M à l'instant t est la même que celle du point A à l'instant $t - \frac{d}{c}$ (c étant la célérité des ondes le long de la corde). En effet la vibration a mis un temps $\delta t = \frac{d}{C}$ à parcourir la distance $AM = d$. L'équation horaire du mouvement de M est donc

$$y_M = a \sin \omega \left(t - \frac{d}{c} \right).$$

Numériquement,

$$y_1 = 3.10^{-3} \sin 200\pi \left(0{,}100\,0 - \frac{12{,}5 \times 10^{-2}}{25} \right) = 3.10^{-3} \sin 19\pi = 0,$$

$$y_2 = 3.10^{3} \sin 200\pi \left(0{,}102\,5 - \frac{12{,}5.10^{-2}}{25} \right) = 3.10^{-3} \sin 19{,}5\pi = -\,3.10^{-3}\ \text{m}.$$

La différence de phase entre ces deux positions est

$$\Delta\varphi = \omega(t_2 - t_1) = 200\pi(0{,}102\,5 - 0{,}100\,0) = \frac{\pi}{2}\text{rd}$$

(elle apparaissait d'ailleurs clairement dans le calcul précédent).

3° ***Aspect de la corde.*** – Écrivons d'abord l'expression de l'élongation d'un point courant d'abscisse x de la corde aux instants t_1 et t_2 :

- pour t_1 :

$$z_1 = a \sin \omega \left(t_1 - \frac{x}{c}\right) = 3.10^{-3} \sin 200\pi \left(0{,}100\,0 - \frac{x}{25}\right)$$

$$= 3.10^{-3} \sin (20\pi - 8\pi x) = 3.10^{-3} \sin (-8\pi x) = 3.10^{-3} \sin (\pi + 8\pi x);$$

- pour t_2 :

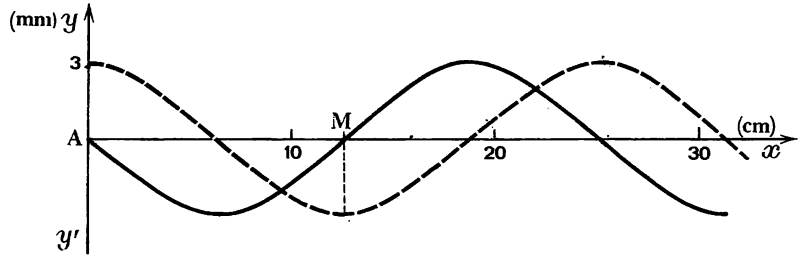
$$z_2 = a \sin \omega \left(t_2 - \frac{x}{c}\right) = 3.10^{-3} \sin 200\pi \left(0{,}102\,5 - \frac{x}{25}\right)$$

$$= 3.10^{-3} \sin (20{,}5\pi - 8\pi x) = 3.10^{-3} \sin \left(-8\pi x + \frac{\pi}{2}\right) = 3.10^{-3} \sin \left(\frac{\pi}{2} + 8\pi x\right).$$

Nous remarquons au passage que la longueur d'onde λ de l'onde progressive est telle que $2\pi \dfrac{x}{\lambda} = 8\pi x$, soit

$$\lambda = 0{,}25 \text{ m}.$$

La corde a l'aspect d'une sinusoïde dans les deux cas. Pour t_1, la phase à l'origine est π, pour t_2 elle est $\dfrac{\pi}{2}$. Nous allons prendre des échelles différentes sur l'axe des élongations et sur l'axe des abscisses afin d'obtenir une figure plus lisible. La corde est représentée à l'instant t_1 en trait plein, et à l'instant t_2 en tiretés.



(La longueur de la partie en mouvement de la corde n'étant pas précisée, nous l'avons fixée arbitrairement.)

B) Ondes stationnaires.

1° ***Ascenseur au repos.*** – Les vibrations produites en A se réfléchissent en O puis à nouveau en A, etc., avec un amortissement faible.

Les ondes allant de A vers O et celles allant de O vers A se composent respectivement entre elles et sont équivalentes à deux ondes progressives :

$$Y_1 = A_0 \sin \left[2\pi \left(ft - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_1\right]$$

allant de A vers O et

$$Y_2 = A_0 \sin\left[2\pi\left(ft + \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_2\right]$$

de O vers A. Ces deux ondes se composent elles-mêmes pour donner

$$y = A_0\left[\sin\left[2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_1\right] + \sin\left[2\pi\left(ft + \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_2\right]\right]$$
$$= 2A_0 \sin\left(2\pi ft + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right).$$

Si toutes les ondes partant de A (de même que toutes celles partant de O) sont en phase, A_0 est grand devant a, amplitude du vibreur et le point A peut être considéré comme fixe. La condition de phase est alors

$$|AO| + |OA| = k\lambda \quad (k \text{ entier}),$$

soit $AO = k\dfrac{\lambda}{2}$ correspondant au nombre de fuseaux de la corde.

Nous pouvons alors identifier terme à terme notre expression de y avec celle proposée, soit

$$2A_0 = 8.10^{-3} \text{ m},$$

$$\sin\left(2\pi ft + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) = \cos 200\pi t,$$

soit

$$f = 100 \text{ Hz} \quad \text{et} \quad \varphi_1 + \varphi_2 = \pi;$$

$$\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) = \sin 5\pi x,$$

soit

$$\lambda = 0{,}4 \text{ m} \quad \text{et} \quad \varphi_2 - \varphi_1 = -\pi;$$

et finalement

$$\varphi_1 = \pi \quad \text{et} \quad \varphi_2 = 0 \quad (\text{mod. } 2\pi).$$

a) *Longueur* AO. — Le segment AO comprend quatre fuseaux, soit $k = 4$, nous avons donc

$$AO = 4 \times \frac{0{,}4}{2} = 0{,}8 \text{ m}.$$

b) *Célérité des ondes.* — La longueur d'onde est liée à la célérité et à la fréquence par la relation $\lambda = \dfrac{c}{f}$, d'où $c = \lambda f$ et, *numériquement*, $c = 0{,}4 \times 100 = 40 \text{ m.s}^{-1}$.

c) Vitesses de deux points. – La corde étant le siège d'ondes transversales, la vitesse d'un point n'a qu'une composante, $\frac{dy}{dt}$, dont l'expression est

$$\frac{dy}{dt} = -\,8.10^{-3} \times 200\pi \sin 5\pi x \sin 200\pi t \quad \text{(SI)}.$$

Les vitesses cherchées seront donc

- pour C_1 :

$$v_1 = -\,1{,}6\pi \sin(5\pi \times 0{,}05)\sin(200\pi \times 6{,}25.10^{-2}) = -\,1{,}6 \sin\frac{\pi}{4}\sin 12{,}5\pi,$$

soit

$$v_1 \approx -\,3{,}554 \text{ m.s}^{-1}.$$

- pour C_2 :

$$v_2 = -\,1{,}6\pi \sin(5\pi \times 0{,}35)\sin(200\pi \times 6{,}25.10^{-2})$$

$$= -\,1{,}6\pi \sin\frac{7\pi}{4}\sin 12{,}5\pi \approx +\,3{,}554 \text{ m.s}^{-1}.$$

2° *Ascenseur montant.* – (N.B. – Nous admettrons que l'allongement de la corde sous l'effet de l'augmentation de tension est négligeable, et que par conséquent μ ne varie pas.)

Les quatre fuseaux seront conservés si la longueur d'onde ne varie pas. La fréquence restant la même, il faut que la célérité des ondes reste constante, donc que F, la tension de la corde, garde la même valeur, soit $F = mg$. Or, dans la cabine en mouvement, la masse m_1 possédant l'accélération γ_1, nous aurons

$$F - m_1 g = m_1 \gamma_1 \quad (g \text{ et } \gamma_1 \text{ en modules}),$$

soit

$$m_1 = m\frac{g}{g + \gamma_1}$$

et, *numériquement*,

$$m_1 = 100\,\frac{9{,}8}{9{,}8 + 1{,}2} = 89{,}1 \text{ g}.$$

3° *Longueur variable.* – Orientons l'axe vertical de haut en bas. Nous pouvons considérer les mesures algébriques des accélérations. Si F_i désigne alors le module de la tension de la corde, nous avons, quelle que soit l'accélération γ_i de l'ascenseur, donc de m,

$$mg - F_i = m\bar{\gamma}_i,$$

soit

$$F_i = m(g - \bar{\gamma}_i)$$

(alors qu'au repos, nous avons $F = mg$).

Si μ reste constant, nous voyons que la célérité V des ondes va prendre une valeur V_i telle que

$$\frac{V_i}{V} = \sqrt{\frac{F_i}{F}} = \sqrt{\frac{g - \bar{\gamma}_i}{g}}.$$

Puisque la longueur d'onde est $\lambda = \frac{V}{f}$, la nouvelle longueur d'onde sera $\lambda_i = \frac{V_i}{f}$ et si h_i désigne l'augmentation algébrique de AO, nous aurons, sachant que

$$AO = 4\frac{\lambda}{2} \quad \text{et} \quad AO + h_i = 4\frac{\lambda_i}{2},$$

$$\frac{AO + h_i}{AO} = \frac{\lambda_i}{\lambda} = \frac{V_i}{V} = \sqrt{\frac{g - \bar{\gamma}_i}{g}},$$

soit

$$h_i = AO\left(\sqrt{\frac{g - \bar{\gamma}_i}{g}} - 1\right).$$

a) $\bar{\gamma}_1$ est dirigé vers le haut, donc $\bar{\gamma}_1 = -\gamma_1$ et, *numériquement*,

$$h_1 = 0{,}8\left(\sqrt{\frac{9{,}8 + 1{,}2}{9{,}8}} - 1\right) \approx + 4{,}76.10^{-2}\ \text{m}, \quad \text{ou} \quad 4{,}76\ \text{cm}.$$

b) $\bar{\gamma}_2$ est dirigé vers le bas et $\bar{\gamma}_2 = \gamma_2$, d'où

$$h_2 = 0{,}8\left(\sqrt{\frac{9{,}8 - 1{,}8}{9{,}8}} - 1\right) = - 7{,}72.10^{-2}\ \text{m, ou} - 7{,}72\ \text{cm}$$

(nous devons cette fois raccourcir AO).

15

1. – Stroboscopie.

2. – *Propagation d'une onde à la surface d'un liquide :* mouvement d'un point, aspect de la surface.

3. – *Interférences* à la surface d'un liquide, d'abord avec des sources synchrones et en phase, puis déphasées de $\frac{\pi}{4}$ radian.

4. – Équations horaires des mouvements de plusieurs points.

A) Une lame vibrante porte une pointe dont l'extrémité S, animée d'un mouvement vertical, sinusoïdal, d'amplitude $a = 0{,}5$ cm, frappe la surface de l'eau.

1° Décrire le phénomène observé.

2° Un stroboscope éclaire la surface de l'eau. La fréquence N′ des éclairs est constante : $N' = 25$ Hz. On augmente progressivement, à partir de la valeur zéro, la fréquence de vibration de la lame. Pour une fréquence N de celle-ci, on observe, pour la première fois, l'immobilité apparente des rides à la surface de l'eau.

a) Calculer la fréquence N des vibrations de la lame.

b) Calculer la longueur d'onde du mouvement vibratoire se propageant à la surface de l'eau.

3° On prendra pour origine des abscisses le milieu O du segment balayé par S, pour origine des temps l'instant où S est à son élongation maximale au-dessus de la surface libre de l'eau. (O se trouve sur la surface libre de l'eau au repos.)

a) Pour la fréquence N, déterminer l'équation horaire du mouvement de S : $y_S(t)$.

b) Pour la fréquence N, déterminer l'équation horaire du mouvement d'un point M de la surface de l'eau.

Application numérique : $y_M(t)$ pour $OM = 1{,}2$ cm.

c) Représenter sur un même graphe les fonctions $y_S(t)$ et $y_M(t)$. Conclusion.

4° Représenter graphiquement l'aspect de la surface de l'eau, le long d'un rayon Ox quelconque à l'instant $t = 0{,}07$ s.

B) Deux lames vibrantes portent respectivement deux pointes dont les extrémités S_1 et S_2, distantes de 5,3 cm, animées chacune d'un mouvement vertical sinusoïdal, d'amplitude $a = 0{,}5$ cm, de fréquence 25 Hz, frappent la surface de l'eau en O_1 et O_2.

A l'instant $t = 0$, S_1 est à son élongation maximale, au-dessus de la surface de l'eau.

1° Les pointes vibrent en phase.

a) Décrire le phénomène observé.

b) En utilisant la construction de Fresnel, déterminer l'équation horaire $y(t)$ du point M de la surface de l'eau situé aux distances $O_1M = 3{,}2$ cm, $O_2M = 3{,}0$ cm.

2° La vibration de S_2 présente un retard de phase de $\frac{\pi}{4}$ sur la vibration de S_1. On se propose d'étudier les états vibratoires des points de la surface de l'eau alignés avec O_1 et O_2.

Déterminer l'équation horaire $y(t)$ du mouvement d'un point M dans les cas suivants :

a) **M est situé entre O_1 et O_2 ; cas particulier où M est en O, milieu de O_1O_2.**

b) **M est situé à l'extérieur du segment O_1O_2 du côté de O_2.**

c) **M est situé à l'extérieur du segment O_1O_2 du côté de O_1.**

N.B. — Les parties A) et B) sont indépendantes. La vitesse de propagation des ondes à la surface de l'eau est $v = 0{,}20\ \text{m.s}^{-1}$ (amortissement négligeable). Pour chaque graphe, on précisera l'échelle adoptée. Un dispositif approprié permet d'éviter la réflexion des ondes sur les parois.

(Séries C et E. Toulouse. juin 1974)

A) 1° Décrire le phénomène observé. — Des rides circulaires prennent naissance au point S, se dilatent en s'écartant de S avec une vitesse constante. Toutes les rides sont concentriques, de centre S. La distance entre deux rides consécutives (différence de leurs rayons) est constante.

2° *a*) Fréquence N des vibrations de la lame. — La surface de l'eau n'est vue qu'aux instants des éclairs du stroboscope. Entre deux éclairs consécutifs, les rides se dilatent; l'immobilité apparente est observée si, pendant l'intervalle de temps $T' = \dfrac{1}{N'}$ qui sépare deux éclairs, chaque ride est remplacée exactement par une autre.

Or, l'intervalle de temps qui sépare la formation de deux crêtes est égal à la période $T = \dfrac{1}{N}$ de la lame vibrante. Puisque les crêtes se propagent avec la vitesse v, la distance qui sépare deux crêtes consécutives est $vT = \lambda$, longueur d'onde du phénomène.

Considérons deux crêtes circulaires : l'une est de rayon r à l'instant t, l'autre est de rayon

$$r' = r + kvT,$$

avec k entier. Pour que, pendant la durée T', la première puisse remplacer exactement la seconde, il faut que l'espace parcouru vT' soit égal à la différence des rayons : $vT' = r' - r = kvT$. La condition d'immobilité apparente est donc $T' = kT$, soit $N = kN'$. La fréquence N croît ; la valeur minimale de N qui donne l'immobilité apparente correspond à $k = 1$, soit $N = N' = 25$ Hz.

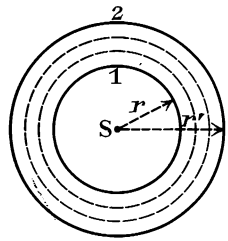


FIG. 1

***b*) Longueur d'onde du mouvement vibratoire.**
Nous avons vu que cette longueur est

$$\lambda = vT = \frac{v}{N} = \frac{0{,}20}{25} = 8.10^{-3}\ \text{m}, \qquad \text{ou} \qquad 8\ \text{mm}.$$

3° *a*) Équation horaire du mouvement de S. — C'est un mouvement rectiligne sinusoïdal d'amplitude

$$a = 0{,}5\ \text{cm} = 5.10^{-3}\ \text{m},$$

de fréquence $\omega = 2\pi N = 50\pi$ radians par seconde, d'équation

$$y_S = a \sin(\omega t + \varphi).$$

A l'instant $t = 0$, y_S est positif (au-dessus de la surface de l'eau) et maximal ; donc

$$\dot{y}_S = \frac{dx_S}{dt} = \omega a \cos(\omega t + \varphi)$$

est nulle à l'instant $t = 0$. Nous avons

$$(y_S)_0 = a \sin \varphi = a,$$
$$(\dot{y}_S)_0 = \omega a \cos \varphi = 0,$$

à l'instant $t = 0$. Les conditions $\cos \varphi = 0$, $\sin \varphi = 1$, conduisent à la valeur $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (modulo 2π). Il vient

$$y_S(t) = a \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

soit

$$y_S(t) = a \cos(\omega t) = 5.10^{-3} \cos(50\pi t).$$

***b)* Équation horaire du mouvement d'un point M de la surface de l'eau.** – Soit $OM = x$ la distance du point M à la source. Entre la source et le point M, la durée de propagation est $\frac{r}{v}$.

En l'absence d'amortissement, le point M répète donc exactement, à l'instant t, le mouvement que possédait la source à l'instant $t - \frac{x}{v}$:

$$y_M(t) = y_S\left(t - \frac{x}{v}\right);$$

donc $y_M(t) = a \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{v}\right)$; avec $\omega = 2\pi N$ et

$$\frac{N}{v} = \frac{1}{vT} = \frac{1}{\lambda},$$

il vient

$$y_M(t) = a \cos 2\pi\left(Nt - \frac{x}{\lambda}\right).$$

En particulier, si $x = 1{,}2$ cm $= 12$ mm, $\frac{x}{\lambda} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ et

$$y_M(t) = a \cos(2\pi N t - 3\pi),$$

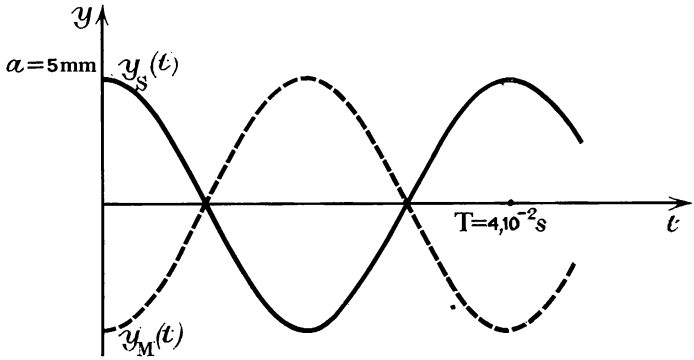
soit

$$y_M(t) = a \cos(2\pi N t - \pi) = -a \cos(2\pi N t).$$

c) **Représentation de $y_S(t)$ et de $y_M(t)$.** — Nous avons à chaque instant $y_M(t) = -y_S(t)$; les deux mouvements sont en *opposition de phase*.

Construisons les graphes des deux fonctions en calculant d'abord quelques valeurs particulières :

t(s)	0	10^{-2}	2.10^{-2}	3.10^{-2}	4.10^{-2}
$50\pi t$ (rd)	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y_S(t)$ (mm)	5	0	− 5	0	5
$y_M(t)$ (mm)	− 5	0	+ 5	0	− 5



Échelles : ordonnées : 2,5 mm par mm;
abscisses : 1 cm pour 0,01 s.

FIG. 2

d) **Représentation de la surface de l'eau.** — A l'instant $t = 0{,}07$ s, l'élongation d'un point M d'abscisse x est

$$y_M(0{,}07) = 5.10^{-3} \cos\left(50\pi \times 0{,}07 - \frac{2\pi x}{\lambda}\right).$$

Or, $\quad 50\pi \times 0{,}07 = 3\pi + \frac{\pi}{2} = 4\pi - \frac{\pi}{2}$; $\quad$ donc

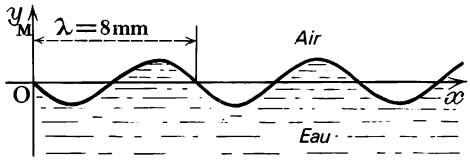
$$y_M(0{,}07) = 5.10^{-3} \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = 5.10^{-3} \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right),$$

soit encore

$$y_M(0{,}07) = 5.10^{-3} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right) = -5.10^{-3} \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right).$$

Déterminons quelques valeurs remarquables de la fonction :

x	0	$\frac{\lambda}{4}$	$\frac{\lambda}{2}$	$3\frac{\lambda}{4}$	λ
$\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$	0	1	0	-1	0
y_M (0,07) (m)	0	-5.10^{-3}	0	$+5.10^{-3}$	0



Échelles : Ox : 16 mm pour $\lambda = 8$ mm (échelle 2);
Oy : 0,5 mm pour 1 mm (échelle 0,5).

FIG. 3

B) 1° Phénomène observé.

a) Les points S_1 et S_2 sont deux sources synchrones et en phase qui émettent des rides circulaires de centres respectifs O_1 et O_2, analogues à celles étudiées dans la partie A).

Ces vibrations interfèrent et le phénomène est apparent dans la région située entre les points O_1 et O_2, où l'on observe des stries immobiles ayant la forme de branches d'hyperboles de foyers O_1 et O_2.

b) ***Mouvement du point*** **M.** — Au point M, situé aux distances x_1 de O_1 et x_2 de O_2, se superposent à l'instant t les vibrations émises par les deux sources aux instants respectifs $t - \frac{x_1}{v}$ et $t - \frac{x_2}{v}$.

A l'instant t, les deux sources ont la même élongation :

$$y_{S_1}(t) = y_{S_2}(t) = a\cos(2\pi Nt);$$

donc, à l'instant t, le point M possède

— l'élongation venue de S_1 :

$$y_{M_1}(t) = a\cos\left(2\pi Nt - \frac{2\pi Nx_1}{v}\right),$$

— l'élongation venue de S_2 :

$$y_{M^2}(t) = a\cos\left(2\pi Nt - \frac{2\pi Nx_2}{v}\right).$$

Ces deux élongations s'ajoutent algébriquement et l'élongation résultante s'écrit

$$y_M(t) = a\cos\left(2\pi Nt - 2\pi\frac{x_1}{\lambda}\right) + a\cos\left(2\pi Nt - 2\pi\frac{x_2}{\lambda}\right)$$

en introduisant la longueur d'onde $\lambda = \frac{N}{v}$.

Au point M tel que

$$O_1M = x_1 = 3{,}2 \text{ cm et } O_2M = x_2 = 3{,}0 \text{ cm},$$

nous avons

$$2\pi\frac{x_1}{\lambda} = 2\pi \times \frac{32}{8} = 8\pi ;$$

$$2\pi\frac{x_2}{\lambda} = 2\pi \times \frac{30}{8} = 7{,}5\pi = 8\pi - \frac{\pi}{2}.$$

L'expression de l'élongation résultante s'écrit

$$y_M(t) = a\cos(2\pi Nt - 8\pi) + a\cos\left(2\pi Nt - 8\pi + \frac{\pi}{2}\right),$$

soit

$$y_M(t) = a\cos(2\pi Nt) + a\cos\left(2\pi Nt + \frac{\pi}{2}\right).$$

L'une de ces élongations est en phase avec la source, la seconde est en quadrature avance sur la source. Les vecteurs de Fresnel $\overrightarrow{OA_1}$ et $\overrightarrow{OA_2}$, de module a, occupent les positions indiquées sur la figure 4. L'élongation résultante est représentée par le vecteur de Fresnel $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$ dont l'angle de phase est, à l'instant t,

$$(Oy, OA) = \omega t + \frac{\pi}{4},$$

puisque le parallélogramme OA_1A_2A est un carré.

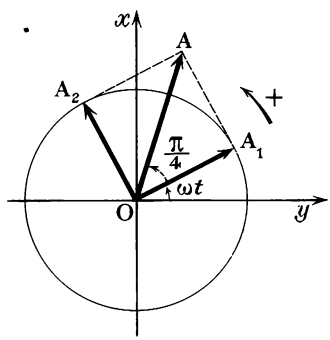


FIG. 4

Nous avons donc

$$y_M(t) = OA\cos\left(2\pi Nt + \frac{\pi}{4}\right),$$

soit, avec $OA = a\sqrt{2} = 5\sqrt{2}.10^{-3}$ m et $N = 25$ Hz,

$$y_M(t) = 7{,}07.10^{-3}\cos\left(50\pi t + \frac{\pi}{4}\right).$$

2° *a)* État vibratoire de M, entre O_1 et O_2. — Le mouvement de S_1 est toujours

$$y_{S_1} = a\cos(2\pi Nt),$$

mais celui de S_2 est maintenant

$$y_{S_2} = a \cos\left(2\pi N t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Les vibrations qui se superposent au point M à l'instant t, aux distances

$$d_1 = O_1M \quad \text{et} \quad d_2 = O_2M$$

des deux sources, sont

$$y_{M_1} = a \cos\left(2\pi N t - 2\pi \frac{d_1}{\lambda}\right),$$

$$y_{M_2} = a \cos\left(2\pi N t - \frac{\pi}{4} - 2\pi \frac{d_2}{\lambda}\right).$$

Appliquons la relation trigonométrique :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) . \cos\left(\frac{p-q}{2}\right),$$

avec $p = 2\pi N t - 2\pi \frac{d_1}{\lambda}$; $q = 2\pi N t - \frac{\pi}{4} - 2\pi \frac{d_2}{\lambda}$. Il vient

$$y_M = y_{M_1} + y_{M_2} = 2a \cos\left(\frac{\pi}{8} + \pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda}\right) . \cos\left(2\pi N t - \frac{\pi}{8} - \pi \frac{d_2 + d_1}{\lambda}\right).$$

Prenons comme origine O, milieu de O_1O_2. Si M est sur le segment O_1O_2 orienté positivement dans le sens O_1O_2, nous avons, avec

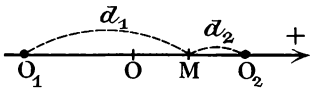


FIG. 5

$$OM = x,$$
$$d_1 = \overline{O_1M} = x - \overline{OO_1},$$
$$d_2 = \overline{MO_2} = \overline{OO_2} - x.$$

Il vient donc

$$d_1 + d_2 = \overline{OO_2} - x + x - \overline{OO_1} = \overline{O_1O_2} = l = 5{,}3 \text{ cm},$$
$$d_2 - d_1 = \overline{OO_2} - x - x + \overline{OO_1} = -2x$$

et l'expression de l'élongation résultante est

$$y_M(t) = 2a \cos\left(\frac{\pi}{8} - 2\pi \frac{x}{\lambda}\right) . \cos\left(2\pi N t - \frac{\pi}{8} - \frac{\pi l}{\lambda}\right),$$

soit, *numériquement*,

$$y_M(t) = 10^{-2} \cos\left(\frac{\pi}{8} - 2\pi \frac{x}{8.10^{-3}}\right) \cos\left(50\pi t - \frac{\pi}{8} - \frac{53\pi}{8}\right),$$

c'est-à-dire

$$y_M(t) = 10^{-2} \cos\left(\frac{\pi}{8} - 2\pi \frac{x}{8.10^{-3}}\right) . \cos\left(50\pi t - \frac{3\pi}{4}\right).$$

Tous les points du segment O_1O_2 vibrent donc en phase, présentant tous un retard de phase de $\frac{3\pi}{4}$ sur la source S_1. L'amplitude dépend de l'abscisse x. En particulier, si $x = 0$, l'amplitude au milieu de O_1O_2 est

$$\mathscr{A} = 10^{-2} \cos \frac{\pi}{8} = 9{,}23.10^{-3} \text{ m}, \qquad \text{ou} \qquad 9{,}23 \text{ mm}.$$

Le mouvement du point O est donc représenté par l'équation

$$y_0 = 9{,}23.10^{-3} \cos\left(50\pi t - \frac{3\pi}{4}\right).$$

***b)* État vibratoire de M, extérieur à O_1O_2, du côté de O_2.** — La distance d_1 est

$$d_1 = \overline{O_1M} = x - \overline{OO_1}$$

et d_2 est

$$d_2 = \overline{O_2M} = x - \overline{OO_2}.$$

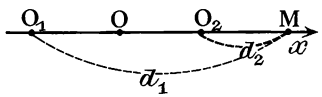


FIG. 6

Nous avons

$$d_2 - d_1 = \overline{OO_1} - \overline{OO_2},$$

soit

$$d_2 - d_1 = \overline{O_2O} + \overline{OO_1} = \overline{O_2O_1} = -l$$

et

$$d_1 + d_2 = 2x - \overline{OO_1} - \overline{OO_2} = 2x.$$

Il vient

$$y_M = 2a \cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi l}{\lambda}\right) . \cos\left(2\pi Nt - \frac{\pi}{8} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right).$$

Avec $l = 53$ mm, il vient

$$\frac{\pi}{8} - \frac{\pi l}{\lambda} = \frac{\pi}{8} - \frac{53\pi}{8} = -\frac{52\pi}{8} = -6{,}5\pi,$$

donc

$$y_M = 10^{-2} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) . \cos\left(2\pi Nt - \frac{\pi}{8} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = 0.$$

Les points situés à l'extérieur de O_1O_2 du côté de O_2 sont au repos car leur amplitude est nulle.

***c)* État vibratoire de M, extérieur à O_1O_2, du côté de O_1.** — Nous avons maintenant

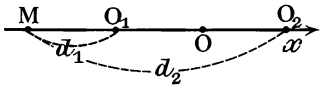


FIG. 7

$$d_1 = \overline{MO_1} = \overline{OO_1} - x,$$

$$d_2 = \overline{MO_2} = \overline{OO_2} - x,$$

donc

$$d_2 - d_1 = \overline{OO_2} - x - \overline{OO_1} + x = \overline{O_1O} + \overline{OO_2} = \overline{O_1O_2} = l,$$
$$d_1 + d_2 = \overline{OO_1} + \overline{OO_2} - 2x = -2x.$$

L'état vibratoire du point M est représenté par la fonction

$$y_M(t) = 2a \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi l}{\lambda}\right) . \cos\left(2\pi Nt - \frac{\pi}{8} + \frac{2\pi x}{\lambda}\right).$$

Avec $l = 53$ mm, nous avons

$$\frac{\pi}{8} + \frac{\pi l}{\lambda} = \frac{\pi}{8} + \frac{53\pi}{8} = \frac{54\pi}{8} = 6{,}75\pi,$$

donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi l}{\lambda}\right) = \cos\left(6\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

L'état vibratoire d'un point situé du côté de O_1, à la distance $|x|$ de O, est donc

$$y_M(t) = -a\sqrt{2} \cos\left(2\pi Nt - \frac{\pi}{8} + \frac{2\pi x}{\lambda}\right),$$

soit
$$y_M(t) = -7{,}07.10^{-3} \cos\left(50\pi t - \frac{\pi}{8} + \frac{2\pi x}{8.10^{-3}}\right).$$

Ces points ont même amplitude, mais leur phase à l'origine du temps varie linéairement en fonction de x.

16

1. – Célérité de propagation du son dans un gaz.
2. – Ondes progressives *longitudinales* dans un tuyau.
3. – Ondes stationnaires *longitudinales*.
4. – Ondes de pression agissant sur un microphone. Observation à l'oscilloscope.

Remarques. – 1° Les trois parties du problème sont indépendantes.

2° Un oscilloscope bicourbe permet l'étude simultanée, avec une seule base des temps, de deux phénomènes périodiques injectés respectivement en deux entrées de déviation verticale, soit E_1 et E_2. Si les deux phénomènes ont la même fréquence, les deux courbes qui leur correspondent sont immobiles sur l'écran, à condition que la base des temps soit synchronisée sur l'un des deux phénomènes et qu'il existe une différence de phase constante entre le phénomène synchronisé et l'autre. L'amplification intérieure de chaque voie permet d'autre part de donner des amplitudes égales aux deux courbes qui pourront ainsi se superposer.

3° On rappelle que pour des gaz de même atomicité et à la même température le produit $V\sqrt{d}$ est constant (V est la vitesse du son dans un gaz de densité d par rapport à l'air; masse volumique de l'air : 1,3 g par litre dans les conditions normales).

A) Une source sonore S est placée à l'orifice A d'un large tuyau cylindrique de longueur illimitée. On admettra que les vibrations sonores se propagent dans la direction de l'axe du tuyau en ondes planes et sans amortissement. On caractérise l'ébranlement par la variable Δp qui exprime la différence entre la pression p qui existe en un point du milieu lors du passage de l'onde, et la pression p_0 en absence de vibrations.

Soit $\Delta p_S = \Delta p_0 \sin(\omega t + \varphi)$ l'expression des vibrations en S. Le tuyau est rempli d'air à 16 °C (vitesse du son dans l'air à 16 °C 340 m/s). La fréquence du son émis est 170 hertz.

1° Donner l'expression de Δp_M en un point M situé à 25 cm de S. On choisira l'origine des temps telle qu'à l'instant $t = 0$, $\Delta p_S = \Delta p_0$.

2° Représenter sur un même graphe, les variations en fonction du temps de Δp_S et de Δp_M. On choisira l'échelle des temps telle que le graphe donne au moins deux périodes complètes des deux courbes.

B) La source S est un petit haut-parleur alimenté par un courant alternatif sinusoïdal. La tension du générateur basse fréquence produisant ce courant est branchée sur l'entrée E_1 d'un oscilloscope bicourbe (*cf.* remarque au début du texte), alors que l'entrée E_2 est reliée à un microphone M, sensible aux variations de pression. M peut se déplacer le long de l'axe du tuyau et l'on admettra qu'il ne perturbe pas le phénomène. La base des temps est synchronisée sur l'entrée E_1.

1° Que voit-on sur l'écran de l'oscilloscope, lorsque M occupe successivement diverses positions en s'éloignant de la source ?

2° Pour une certaine position M_1 de M, les deux sinusoïdes sont superposées. M se déplaçant au-delà de M_1 en s'éloignant de S, on verra de nouveau les deux sinusoïdes super-

posées lorsque M se trouvera en M_2. Que représente M_1M_2 ? Les conditions de propagation restant les mêmes qu'au A), quelle est la fréquence de l'émetteur si

$$M_1M_2 = 136 \text{ cm} ?$$

3° Le tuyau est rempli d'oxygène pur à 16 °C. A partir d'une position où les deux courbes sur l'oscilloscope sont superposées, on éloigne le microphone M le long de l'axe du tuyau et on le fixe à une position pour laquelle les sinusoïdes se superposent pour la troisième fois. On remplace progressivement l'oxygène par de l'azote pur à la même température. De combien et dans quel sens se déplace la sinusoïde E_2 par rapport à la sinusoïde E_1 ? O = 16 g ; N = 14 g.

C) La longueur du tuyau est limitée. Soit AB sa longueur. Il est ouvert aux deux extrémités. Les dimensions du haut-parleur et du microphone sont petites par rapport au diamètre du tuyau. La fréquence de l'excitation est 200 hertz et les conditions de propagation sont celles du A).

1° Trouver la longueur minimale de AB pour qu'il s'établisse une onde stationnaire avec un nœud de variation de pression à chaque extrémité.

2° La longueur de AB étant celle du C), 1°, que devient qualitativement la sinusoïde E_2 si M se déplace de B vers A ?

3° On libère l'entrée E_1 et l'on branche sur cette entrée un microphone M′ identique à M. M se trouvant au milieu de AB, M′ étant placé à mi-chemin entre M et l'une des extrémités du tuyau, représenter graphiquement les enregistrements observés sur l'oscilloscope.

Calculer le rapport de leurs amplitudes. (Les amplifications correspondantes aux deux entrées E_1 et E_2 sont rigoureusement identiques.)

(Séries C et E. Bordeaux, septembre 1974)

A) Ondes progressives.

1° *Vibration en* M. – L'état vibratoire de M est à chaque instant t le même que celui de la source S à un instant $t - \frac{x}{V}$, x étant la mesure de la distance SM et V la vitesse de propagation des ébranlements dans le milieu. Le rapport $\frac{x}{V}$ chiffre le temps nécessaire à un ébranlement issu de S pour arriver au point M.

Précisons d'abord l'équation du mouvement de S : Pour $t = 0$, $\Delta p_S = \Delta p_0$, or l'équation nous donne $\Delta p_S = \Delta p_0 \sin \varphi$.

Par identification, $\sin \varphi = 1$, soit $\varphi = \frac{\pi}{2} (\text{mod. } 2\pi)$.

La vibration en S a pour équation

$$\Delta p_S = \Delta p_0 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right),$$

ou encore

$$\Delta p_S = \Delta p_0 \cos \omega t.$$

Ainsi que nous l'avons dit, la vibration en M est en retard de $\frac{x}{V}$ sur celle de la source, d'où

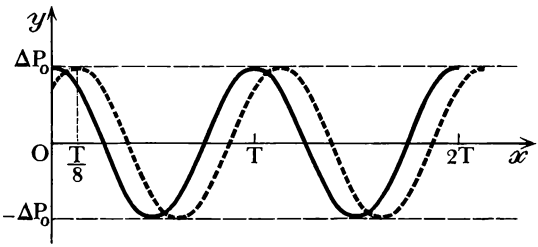
$$\Delta p_M = \Delta p_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{V} \right)$$

et, *numériquement*,

$$\Delta p_M = \Delta p_0 \cos 2\pi \times 170\left(t - \frac{0{,}25}{340}\right) = \Delta p_0 \cos\left(2\pi \times 170t - \frac{\pi}{4}\right).$$

M vibre avec un retard de phase de $\frac{\pi}{4}$ par rapport à S.

2° ***Représentation graphique.*** — Pour la commodité de la représentation, nous prendrons sur l'axe des abscisses une unité de temps $T = \frac{1}{170}$ s et sur l'axe des ordonnées une unité égale à Δp_0. La courbe représentative de Δp_S est la sinusoïde $y = \cos 2\pi x$, de période 1, d'amplitude 1 et passant par un maximum pour $x = 0$ (courbe en trait plein). La courbe représentative de Δp_M est une courbe semblable. décalée de $\frac{\frac{\pi}{4}}{2\pi} = \frac{1}{8}$ vers la droite (courbe en pointillés) :



B) Étude à l'oscilloscope

1° ***Aspect de l'écran.*** — La figure observée sur l'écran aura en général un aspect comparable à celle que nous venons de tracer. En effet, le signal appliqué à l'entrée E_1, assurant simultanément la synchronisation du balayage, produira sur l'écran une sinusoïde fixe, comparable à la sinusoïde en trait plein que nous avions tracée. Le signal appliqué à l'entrée E_2 produira lui aussi sur l'écran une sinusoïde en général décalée horizontalement par rapport à la précédente. Ce décalage dans l'espace représentant fidèlement le décalage de temps (ou de phase) entre la variation de pression enregistrée par le microphone et la tension aux bornes du haut-parleur, il dépendra de la position de M et l'on verra sur l'écran la deuxième sinusoïde se déplacer linéairement en fonction de l'abscisse de M.

Les deux sinusoïdes coïncideront périodiquement à chaque fois que le signal enregistré par M sera en phase avec le courant dans le haut-parleur.

2° ***Fréquence de l'émetteur.*** — D'après la description de l'expérience, M_2 est le point le plus proche de M_1 tel que la vibration soit en phase avec celle de M_1. M_1M_2 est donc la plus courte distance séparant deux points vibrant en phase : c'est donc la longueur d'onde λ de la vibration sonore. La fréquence de l'émetteur produisant cette vibration est donc

$$f = \frac{V}{\lambda} = \frac{340}{1{,}36} = 250 \text{ Hz}.$$

3° ***Influence de la densité du gaz.*** – Dans cette expérience, nous admettrons que la substitution des gaz ne se produit qu'à partir de la position initiale du microphone. De cette façon, la phase de la vibration en ce point reste fixe et peut nous servir de référence. Si ce n'était pas le cas, celle-ci dépendrait de la distance entre la source et le point en question, distance qui nous est inconnue. D'après la première partie de l'expérience, le microphone est placé au niveau du troisième point vibrant en phase à partir du point de référence. Il est donc à une distance $x = 3\lambda_1$ de celui-ci, λ_1 désignant la longueur d'onde de la vibration dans l'oxygène.

Si maintenant l'oxygène est remplacé par un milieu où la longueur d'onde est λ_2, le retard de phase de la vibration en M par rapport au point de référence sera

$$\varphi = 2\pi \frac{x}{\lambda_2}, \qquad \text{soit} \qquad \varphi = 2\pi \times 3 \times \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

mais la longueur d'onde est proportionnelle à la vitesse de propagation du son, donc

$$\varphi = 2\pi \times 3 \times \frac{V_1}{V_2}$$

(les indices 1 et 2 continuant à caractériser respectivement l'oxygène et l'azote).

Les vitesses du son étant inversement proportionnelles aux racines carrées des densités, nous aurons

$$\varphi = 2\pi \times 3 \times \frac{\sqrt{d_2}}{\sqrt{d_1}}$$

et les densités étant elles-mêmes proportionnelles aux masses molaires,

$$\varphi = 2\pi \times 3 \times \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} = 2\pi \times 3 \times \sqrt{\frac{14}{16}} = 2\pi \times 2{,}806.$$

Le retard de phase initial était tout simplement

$$\varphi_0 = 2\pi \times 3\frac{\lambda_1}{\lambda_1} = 2\pi \times 3.$$

Lors du remplacement de l'oxygène par de l'azote, le retard de phase de M par rapport au point de référence varie donc de

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 = 2\pi(2{,}806 - 3) = -2\pi \times 0{,}194.$$

Le retard de phase (caractérisé par un décalage vers la droite de la sinusoïde) a donc diminué. La sinusoïde se déplace donc vers la gauche de l'écran, de 0,194 période soit à peu de chose près $\frac{1}{5}$ de période.

C) Ondes stationnaires

1° ***Longueur du tuyau.*** – Un régime d'ondes stationnaires se caractérise par une succession de maximums et de minimums (en principe nuls) de la vibration. Ces maximums et minimums sont généralement nommés respectivement ventres

et nœuds, par analogie avec le phénomène observé sur une corde vibrante. Ils sont équidistants et alternés, un nœud étant séparé du nœud le plus proche par une demi-longueur d'onde. Pour que AB soit le siège d'une onde stationnaire, il faudra qu'il contienne un nombre entier de « fuseaux », donc que sa longueur soit un multiple de la demi-longueur d'onde. La longueur minimale est d'une demi-longueur d'onde, soit

$$L = \frac{\lambda}{2} = \frac{V}{2 \cdot f}$$

et, *numériquement*,

$$L = \frac{340}{2 \times 200} = 0{,}85 \text{ m}.$$

2° ***Étude de la sinusoïde.*** — Entre deux nœuds de vibration, tous les points vibrent en phase, avec une amplitude variable, nulle au niveau des nœuds, maximale au niveau du ventre situé au milieu. Si nous déplaçons M de B à A, la trace de l'oscilloscope, rectiligne au départ (amplitude nulle) prendra l'aspect d'une sinusoïde d'amplitude croissante en approchant du milieu de AB. Cette sinusoïde ne se déplacera pas latéralement par rapport à la sinusoïde E_1 car la phase ne dépend pas de la position de M. Puis quand M aura dépassé le milieu, l'amplitude décroîtra pour s'annuler à l'arrivée en A.

3° ***Utilisation de deux microphones.*** — Retrouvons brièvement la loi de variation de l'amplitude de la vibration entre A et B. Pour cela, considérons que le tuyau est le siège de deux ondes progressives se déplaçant respectivement de gauche à droite et de droite à gauche, de mêmes fréquence et amplitude. Soit

$$\Delta p_1 = \Delta p_0 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_1\right),$$

$$\Delta p_2 = \Delta p_0 \sin\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_2\right).$$

L'onde stationnaire est la somme algébrique des deux, soit

$$\Delta p = 2\Delta p_0 \sin\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right).$$

Nous savons que l'amplitude est maximale au milieu du tuyau. Si nous y plaçons l'origine des abscisses, cela impliquera $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi \pmod{2\pi}$.

L'expression de la vibration est finalement

$$\Delta p = 2\Delta p_0 \sin(\omega t + \varphi) \cos\frac{2\pi x}{\lambda}$$

et l'amplitude en un point d'abscisse x est

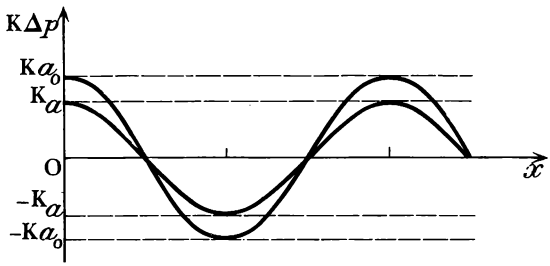
$$a = 2\Delta p_0 \cos\frac{2\pi x}{\lambda}.$$

Le point M a pour abscisse $x = 0$, l'amplitude y est maximale, soit $a_0 = 2\Delta p_0$.

Le point M′ a pour abscisse $x = \pm \frac{\lambda}{8}$, l'amplitude y est

$$a = 2\Delta p_0 \cos\left(\pm \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,\Delta p_0.$$

Les deux sinusoïdes observées ont donc des intersections communes avec l'axe des abscisses et des amplitudes dans un rapport $\frac{a}{a_0} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



(K désigne le rapport de proportionnalité entre l'ordonnée du spot de l'oscilloscope et la pression qui s'exerce sur M.)

C. – Courant alternatif

17

1. – Cordes vibrantes.
2. – Stroboscopie (ondes stationnaires).
3. – *Calcul de R, Z et L* à partir des mesures faites en *continu* puis en *alternatif.*
4. – *Impédance d'une bobine :*

$$Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}.$$

5. – *Avance de phase de u sur i*

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{R}.$$

6. – *Étude des tensions par les vecteurs de Fresnel, pour deux impédances en série* (R′ et R, L).
7. – *Condition de résonance :* $LC\omega^2 = 1$.

A) 1° Par un dispositif approprié on fait vibrer une corde fine à la fréquence $f = 100$ Hz. Pour une certaine tension F de la corde, on observe des fuseaux particulièrement nets, la distance entre deux nœuds consécutifs étant $l = 20$ cm. Sachant que la corde a pour masse linéique $\mu = 2.10^{-3}$ kg.m^{-1}, quelle est sa tension ?

On demande d'abord le calcul littéral, puis l'application numérique.

2° On observe la corde par stroboscopie. Le premier éclair considéré illumine la corde quand ses points sont à leur élongation maximale. Expliquer les aspects observés lorsque la fréquence des éclairs est 100 Hz, 200 Hz, 300 Hz, 400 Hz, 500 Hz ; dessiner ces aspects dans les cinq cas ci-dessus en faisant des schémas soignés et suffisamment grands concernant une longueur de corde de 40 cm.

B) Nous étudions maintenant l'électro-aimant excitateur de la corde, considéré dans la partie A).

1° Dans une première expérience, en courant continu, quand la tension aux bornes A et B de la bobine de l'électro-aimant est 2,4 volts, l'intensité dans le circuit est 1,5 ampère. Dans une seconde expérience, en courant sinusoïdal de fréquence N = 50 Hz, la tension efficace aux bornes A et B est 30 volts quand l'intensité efficace est 0,5 ampère.

Quelles sont la résistance R et l'inductance L de la bobine ?

2° On considère maintenant un circuit électrique qu'on alimente en courant sinusoïdal de fréquence N = 50 Hz qui comprend en série :

- la bobine précédente privée de son noyau de fer doux ;
- une résistance variable R′ (les fils de liaison ont une résistance négligeable).

Les tensions efficaces aux bornes du circuit, de la bobine, de la résistance R′ sont respectivement U, U_1 et U_2 volts et l'intensité efficace dans le circuit est désignée par I.

a) Donner l'expression de l'inductance L′ de la bobine en fonction de U_1, I, N et R. Calculer sa valeur numérique sachant que $U_1 = 2{,}7$ V et I = 1,2 A. Comparer cette valeur avec L. Commenter.

b) u_1 désignant la tension instantanée aux bornes de la bobine et i l'intensité instantanée dans le circuit, exprimer $u_1 = f(t)$ et $i = f(t)$. On prendra comme origine des temps l'instant où u_1 s'annule avant de prendre des valeurs positives.

Tracer les courbes représentatives sur le même graphique (échelle : 1 cm pour 1 volt ; 1 cm pour 1 ampère ; 4 cm pour 0,01 seconde).

c) Sachant que R′ = 2,25 Ω, tracer le diagramme de Fresnel relatif aux tensions U, U_1 et U_2. Utiliser ce diagramme pour déterminer la valeur de la tension U aux bornes du circuit entier et le facteur de puissance du circuit.

d) La tension U aux bornes du circuit étant maintenue à la valeur précédente, on désire que l'intensité soit en phase avec cette tension, tout en conservant sa valeur efficace 1,2 A. Montrer que c'est réalisable par l'adjonction en série d'un condensateur et par une certaine variation de la résistance R′. Quelles sont la capacité du condensateur et la nouvelle valeur de R′ ? Que penser sur le plan pratique de la capacité nécessaire ?

N.B. – On rappelle que la vitesse de propagation d'un mouvement vibratoire le long d'une corde tendue est donnée par l'expression $V = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$, F et μ ayant les significations données ci-dessus.

(Séries C et E. Territoire des Afars et des Issas, juin 1976.

A) 1° Calcul de la tension de la corde. – Considérons un point M situé à la distance x de l'extrémité B de la corde. Celle-ci est parcourue par une onde incidente de fréquence f qui circule dans le sens 1, et par l'onde réfléchie avec changement de signe sur l'extrémité fixe B, qui circule dans le sens 2. Soit v la vitesse de propagation, et soit $y_{1B} = a \sin 2\pi ft$ l'onde incidente arrivant en B à l'instant t. A cet instant, l'onde réfléchie est au point B : $y_{2B} = -a \sin 2\pi ft$, de telle sorte que $y_{1B} + y_{2B} = 0$, comme il convient pour un point fixe.

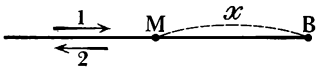


FIG. 1

Au point M, l'onde incidente est à l'instant t ce qu'elle sera en B à l'instant $t + \frac{x}{v}$:

$$y_{1M}(t) = a \sin 2\pi f\left(t + \frac{x}{v}\right),$$

et l'onde réfléchie est à l'instant t ce qu'elle était en Bl'instant $t - \frac{x}{v}$:

$$y_{2M}(t) = -a \sin 2\pi f\left(t - \frac{x}{v}\right).$$

L'onde résultante en M à l'instant t est

$$y_M(t) = y_{1M}(t) + y_{2M}(t).$$

L'identité trigonométrique

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

donne l'expression

$$y_M(t) = 2a \sin 2\pi f \frac{x}{v} \cos 2\pi f t.$$

Nous voyons que le point M effectue un mouvement rectiligne sinusoïdal $y = A \cos 2\pi f t$, d'amplitude

$$A = 2a \sin 2\pi f \frac{x}{v},$$

dont la direction est perpendiculaire à la direction de la corde au repos.

En introduisant la longueur d'onde

$$\lambda = vT = \frac{v}{f},$$

nous voyons que l'amplitude prend la forme

$$A(x) = 2a \sin 2\pi \frac{x}{\lambda}.$$

L'amplitude est nulle aux points tels que $\sin 2\pi \frac{x}{\lambda} = 0$, soit $2\pi \frac{x}{\lambda} = k\pi$ (avec k entier), soit $x = k\frac{\lambda}{2}$.

La distance entre deux nœuds consécutifs est donc $l = \frac{\lambda}{2}$, et la longueur d'onde est $\lambda = 2l$.

La vitesse de propagation est donc $v = \lambda f = 2lf$. Cette vitesse étant aussi $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$, nous obtenons la relation $2lf = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ qui permet de calculer la tension F de la corde :

$$F = 4\mu l^2 f^2.$$

Numériquement,

$$F = 4 \times 2.10^{-3} \times (0{,}2)^2 \times 100^2 = 3{,}20 \text{ N}.$$

2° Observation stroboscopique. — L'amplitude $A(x)$ est positive pour $2k\pi < 2\pi \frac{x}{\lambda} < (2k+1)\pi$ et négative pour $(2k+1)\pi < 2\pi \frac{x}{\lambda} < (2k+2)\pi$, soit encore

$$A(x) > 0 \quad \text{si} \quad k\lambda < x < k\lambda + \frac{\lambda}{2},$$

$$A(x) < 0 \quad \text{si} \quad k\lambda + \frac{\lambda}{2} < x < (k+1)\lambda.$$

Comptons les fuseaux à partir de l'extrémité B.

Tous les points des fuseaux de rang impair (1, 3, 5, ...) ont une amplitude positive et vibrent en phase ; tous les points des fuseaux de rang pair (2, 4, 6, ...) ont une

amplitude négative, vibrent en phase entre eux, mais en opposition de phase avec les points des fuseaux de rang impair, Il suffit donc d'étudier la vibration d'un point de la corde pour connaître l'état vibratoire de tous les autres points.

Nous avons vu que la vibration du point M est

$$y_N = A(x) \cos 2\pi ft.$$

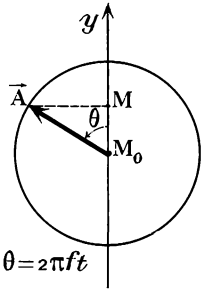


FIG. 2

L'élongation $y_N = \overline{M_0M}$ est donc à tout instant la projection sur l'axe M_0y du vecteur de Fresnel $\vec{A}$, de module $A(x)$, tournant autour de M_0 avec la vitesse angulaire $\omega = 2\pi f$, soit encore f tours par seconde.

Supposons que le stroboscope éclaire la corde avec la fréquence

$$N = nf$$

(n entier = 1, 2, 3, 4, 5).

Le point M est observé n fois pendant une période de son mouvement, donc n fois pendant la durée d'un tour du vecteur de Fresnel, qui avance de $\frac{1}{n}$ tour entre deux éclairs consécutifs.

Il en résulte que les positions observables du point M sont au nombre de n : M_1, M_2, ..., M_n, les positions correspondantes de l'extrémité A du vecteur de Fresnel étant les sommets A_1, A_2, ..., A_n du polygone régulier inscrit de n côtés.

Compte tenu de la persistance des impressions lumineuses sur la rétine, l'œil voit simultanément n points M. Il observe donc simultanément n cordes au repos.

Les constructions page 135 montrent l'aspect obtenu pour n = 1, 2, 3, 4, 5, c'est-à-dire pour les fréquences d'éclairement

$$N = 100, 200, 300, 400, 500 \text{ Hz}.$$

N.B. – Pour n = 1, il n'y a pas de polygone inscrit, mais un seul point A_1 correspondant à l'unique position éclairée M_1. On voit une seule corde au repos.
Pour n = 2, le polygone se réduit au diamètre A_1A_2.

N.B. – Lorsque l'un des côtés du polygone devient parallèle à $x'x$, les deux points M correspondants se confondent ainsi que les deux images correspondantes de la corde.

Dans ce cas

- **pour N = 200 Hz, on obtient une seule image confondue avec $x'x$,**
- **pour N = 300 Hz, il reste deux images,**
- **pour N = 400 Hz, il reste deux images car, simultanément, A_1A_4 et A_2A_3 deviennent parallèles à $x'x$,**
- **pour N = 500 Hz, il reste trois images, car lorsque A_1A_5 est parallèle à $x'x$, A_2A_4 l'est aussi.**

B) 1° Inductance et résistance de la bobine. – En courant continu, pour la tension U_0 = 2,4 V, l'intensité est I_0 = 1,5 A. La résistance de la bobine est donc

$$R = \frac{U_0}{I_0} = \frac{2,4}{1,5} = 1,6\ \Omega.$$

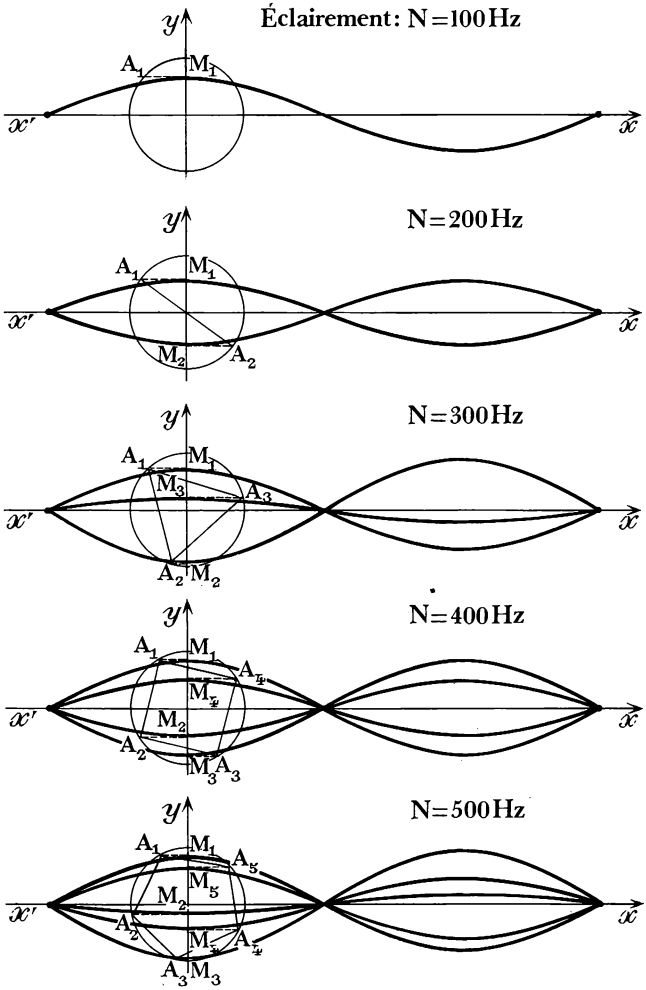

Éclairement: N=100Hz
N=200Hz
N=300Hz
N=400Hz
N=500Hz
y
x'
x
A1
M1
M2
A2
M3
A3
M4
A4
M5
A5

FIG. 3

En courant alternatif, pour la tension efficace U = 30 V, l'intensité efficace est I = 0,5 A. L'impédance de la bobine est $Z = \frac{U}{I} = \frac{30}{0,5} = 60\,\Omega$.

Or, pour la fréquence N = 50 Hz et la pulsation $\omega = 2\pi N$, soit $\omega = 100\pi$ rd.s^{-1}, l'impédance de la bobine est

$$Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}.$$

Nous en déduisons l'inductance L :

$$L = \frac{1}{\omega}\sqrt{Z^2 - R^2},$$

soit, *numériquement*,

$$L = \frac{1}{100\pi}\sqrt{60^2 - (1,6)^2} = 0,191 \text{ H}.$$

2° *a)* Calcul de l'inductance sans le noyau de fer doux. – La nouvelle impédance de la bobine est

$$Z' = \frac{U_1}{I}.$$

La nouvelle valeur de l'inductance étant L', nous avons

$Z' = \sqrt{R^2 + L'^2\omega^2}$, soit $L' = \frac{1}{\omega}\sqrt{Z'^2 - R^2}$. Avec $\omega = 2\pi N$, il vient

$$L' = \frac{1}{2\pi N}\sqrt{\frac{U_1^2}{I^2} - R^2}.$$

Avec $U_1 = 2,7$ V, I = 1,2 A, R = 1,6 Ω et N = 50 Hz, nous obtenons

$$L' = \frac{1}{100\pi}\sqrt{\left(\frac{2,7}{1,2}\right)^2 - (1,6)^2} = 5,04.10^{-3} \text{ H},$$

soit sensiblement 5 mH.

Cette inductance est beaucoup plus faible que L. L'introduction du noyau de fer doux, dont la perméabilité relative est beaucoup plus grande que celle du vide ou de l'air, permet d'obtenir, pour le même nombre d'ampères-tours, un flux beaucoup plus grand à l'intérieur de la bobine. Il en résulte un accroissement considérable de l'inductance $L = \frac{\Phi}{I}$.

***b)* Expression de la tension et de l'intensité instantanée dans la bobine.** – L'origine des temps est telle que

$$u_1(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{du_1}{dt}\right)_{t=0} > 0.$$

Soit $u_1 = U_1\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$ et $\frac{du_1}{dt} = \omega U_1\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$.

A l'instant $t = 0$, nous avons

$$0 = U_1 \sqrt{2} \sin \varphi \qquad \text{et} \qquad \cos \varphi > 0.$$

La première relation donne $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$. La seconde impose le choix de $\varphi = 0$. La tension instantanée est donc

$$u_1 = U_1 \sqrt{2} \sin \omega t = U_1 \sqrt{2} \sin (2\pi N t),$$

soit, *numériquement*,

$$u_1 = 2{,}7 \sqrt{2} \sin (314t) = 3{,}82 \sin (314t).$$

L'intensité instantanée est en retard de phase sur la tension de l'angle φ tel que

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L'\omega}{R} = \frac{5{,}04.10^{-3} \times 314}{1{,}6} = 0{,}989,$$

soit $\varphi = 0{,}780$ rd.

L'intensité maximale étant $I_{max} = I \sqrt{2} = 1{,}2 \sqrt{2} = 1{,}70$ A, nous obtenons l'expression :

$$i = I_{max} \sin (\omega t - \varphi) = 1{,}70 \sin (314t - 0{,}780).$$

Représentation de u_1 et i. — Une période correspond à 0,02 s, soit 8 cm sur l'axe des t.

L'intensité est pratiquement en retard de $\frac{\pi}{4}$ rd sur la tension. Nous avons les courbes de la figure 4.

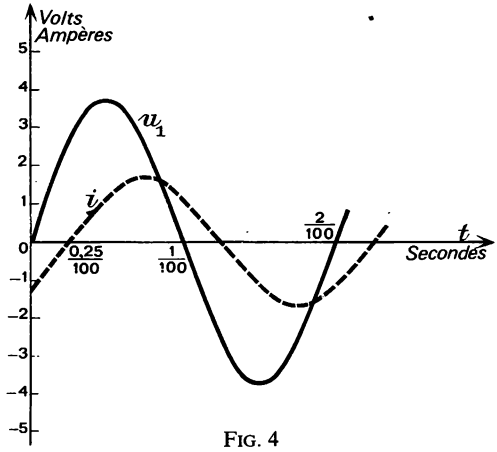


FIG. 4

c) **Diagramme de Fresnel pour le circuit entier.** — Effectuons le diagramme en valeurs efficaces.

La tension aux bornes de R′ est

$$U_2 = R'I = 2{,}25 \times 1{,}2 = 2{,}70 \text{ V}.$$

La tension aux bornes de la bobine est $U_1 = 2{,}70$ V, mais en avance de phase sur l'intensité de $44{,}7 \approx 45°$ soit $\frac{\pi}{4}$ radian, tandis que la tension U_2 est en phase avec l'intensité.

Représentons U_2 par un vecteur $\overrightarrow{OA}$ de module $2{,}7 \times 2 = 5{,}4$ cm (échelle de 2 cm par volt).

A l'échelle de 2 cm par ampère, l'intensité est représentée par un vecteur $\overrightarrow{OI}$ de module $1{,}2 \times 2 = 2{,}4$ cm, de mêmes direction et sens que $\overrightarrow{OA}$.

La tension U_1 est représentée par un vecteur $\overrightarrow{OB}$ de module 5,4 cm formant avec $\overrightarrow{OI}$ l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) = +\frac{\pi}{4}$.

La tension U aux bornes du circuit est représentée par le vecteur $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

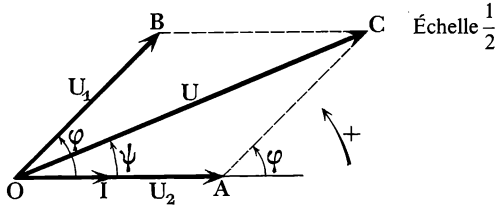


FIG. 5

Dans le triangle OAC, nous avons

$$OC^2 = OA^2 + AC^2 + 2OA \cdot AC \cos \varphi.$$

Nous pouvons calculer la tension U aux bornes du circuit :

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2 \cos \varphi},$$

soit

$$U = \sqrt{(2{,}7)^2 + (2{,}7)^2 + 2 \times (2{,}7)^2 \frac{\sqrt{2}}{2}} = 2{,}7\sqrt{2 + \sqrt{2}} = 4{,}99 \text{ V},$$

soit

$$U \approx 5 \text{ V}.$$

La tension aux bornes du circuit est en avance sur l'intensité de l'angle $\Psi = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}) = 22° 30'$.

Le facteur de puissance du circuit est donc

$$\cos \varphi = \cos 22° 30' = 0{,}924.$$

***d*) Condensateur et résistance R′ permettant de conserver U = 5 V, I = 1,2 A et de réaliser la résonance.** – Avec la pulsation $\omega = 2\pi N = 314$ rd.s^{-1}, la résonance est réalisée pour la capacité C telle que

$$L'C\omega^2 = 1,$$

soit

$$C = \frac{1}{L'\omega^2} = \frac{1}{5{,}04.10^{-3} \times 314^2} = 2{,}01.10^{-3}\ \text{F},$$

soit 2 010 μF. Cette capacité est très grande et difficile à réaliser avec des condensateurs usuels. Lorsque la résonance est réalisée, l'impédance se réduit à la résistance R + R′ du circuit. Nous avons donc, d'après la loi d'Ohm,

$$R + R' = \frac{U}{I} = \frac{5}{1{,}2} = 4{,}17\ \Omega.$$

La nouvelle valeur de R′ doit être

$$R' = 4{,}17 - 1{,}6 = 2{,}57\ \Omega.$$

18

1. – *Tensions instantanées aux bornes de* R, L *et* C *:*

$$u = Ri; \quad u = L\frac{di}{dt}; \quad u = \frac{q}{C}.$$

2. – *Recherche d'une solution de régime permanent par les vecteurs de Fresnel.*

3. – *Impédance :* $Z = \frac{U}{I}$.

4. – Résonance.

5. – *Coefficient de surtension :* $Q = \frac{L\omega_0}{R}$.

6. – Notion d'asymptote (mathématiques).

7. – Théorème du mouvement du centre de gravité.

Ce problème propose une étude d'analogie électromécanique.

A) Électricité.

On monte en série : un condensateur de capacité $C = 4\ \mu F$ et une bobine de résistance $R = 500\ \Omega$, d'inductance $L = 1$ H. On alimente cette portion de circuit à l'aide d'un générateur imposant la tension $u = U\sqrt{2}\cos \omega t$, de valeur efficace $U = 220$ V et de pulsation $\omega = 100\ \pi$ rd.s^{-1}.

1° Établir l'équation donnant u en fonction de $\frac{di}{dt}$, i et $q = \int i\,dt$ (charge du condensateur).

2° Faire la construction de Fresnel et en déduire les expressions et les valeurs numériques des grandeurs suivantes :

***a*) l'avance de phase φ du courant sur la tension,**

***b*) l'impédance Z de la portion de circuit étudiée,**

***c*) la valeur efficace de l'intensité du courant.**

3° Pour quelle valeur ω_0 de ω le déphasage φ est-il nul ?

Quelles sont alors les valeurs de l'impédance et de l'intensité efficace du courant ? Calculer également les valeurs de la fréquence et de la période du courant.

4° On pose $Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}$. Établir les relations

$$\operatorname{tg}\varphi = Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

et

$$\frac{Z}{R} = \sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} = -Q.$$

En vous aidant des résultats des questions précédentes, donner l'allure des courbes représentatives de tg φ et de $\frac{Z}{R}$ en fonction de $X = \frac{\omega}{\omega_0}$.

B) Mécanique.

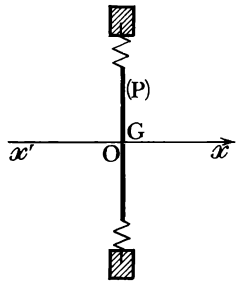
Une plaque P plane, indéformable, de masse m peut se déplacer parallèlement à elle-même suivant une direction $x'x$ normale à son plan.

Écartée à une distance x de sa position d'équilibre, on admettra que le centre d'inertie G (G coïncide avec l'origine O de $x'x$ dans la position d'équilibre) est soumis à l'action des seules forces suivantes, dirigées suivant $x'x$:

– une force de rappel élastique, $F'' = -kx$;

– une force de frottement proportionnelle à la vitesse, $F' = -rv$;

– une force (produite par le passage d'un courant alternatif dans un dispositif solidaire de la plaque) dont l'expression en fonction du temps est $f = F\cos\omega t$.



1° Établir l'équation reliant f, $\frac{dv}{dt}$, v et $x = \int v\,dt$.

2° Mettre cette équation sous une forme analogue à l'équation trouvée au 1° de la partie A), la résoudre à l'aide de la construction de Fresnel et en déduire

a) l'avance de phase φ de la vitesse v sur la force f;

b) la valeur maximale V de la vitesse;

c) l'expression de $\mathscr{Z}_m = \frac{F}{V}$.

Applications numériques :

$$\omega = 100\pi \text{ rd.s}^{-1}, \qquad F = 10 \text{ N}, \qquad m = 0{,}01 \text{ kg},$$
$$r = 10 \text{ kg.s}^{-1}, \qquad k = 3\,920 \text{ N. m}^{-1}.$$

3° Pour quelle valeur ω_0 de ω le déphasage φ est-il nul ? Quelle est alors la valeur de V_0 ?

4° On pose $Q_m = \frac{m\omega_0}{r} = \frac{K}{r\omega_0}$. Calculer tg φ et $\frac{\mathscr{Z}_m}{r}$ en fonction de Q_m, ω et ω_0. Tracer l'allure des courbes représentatives en fonction du rapport $\frac{\omega}{\omega_0}$.

C) Montrer les analogies mathématiques des deux problèmes.

Comparer les équations établies en A), 1° et B), 1°. Que remarque-t-on à l'examen des résultats A), 4° et B), 4° ?

Comment pourrait-on appeler la grandeur $\mathscr{Z}_m$?

On se propose de dresser un tableau récapitulatif des analogies. Compléter les cases vides du tableau suivant :

Grandeurs électriques	R	L	C	i	q
Grandeurs mécaniques					

(Bacc. C et E. Bordeaux. juin 1976)

A) Électricité.

1° *Équation donnant u en fonction de $\frac{di}{dt}$, i et q.* — La charge d'un condensateur de capacité C est proportionnelle à la tension u_C établie entre les armatures : $q = Cu_C$. Cette tension est donc

$$u_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}\int i\,dt.$$

La tension aux bornes d'une résistance R parcourue par un courant d'intensité i est

$$u_R = Ri \quad \text{(loi d'Ohm)}.$$

Une inductance pure peut être considérée comme un récepteur de force contre-électromotrice $e = L\frac{di}{dt}$, et de résistance nulle. Donc

$$u_L = e = L\frac{di}{dt}.$$

La bobine équivaut à la réunion en série de la self pure et de la résistance pure. La tension aux bornes de la bobine est $u_B = L\frac{di}{dt} + Ri$.

Finalement, la tension aux bornes du circuit est $u = u_B + u_C$. Nous avons donc l'équation

$$u = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt. \tag{1}$$

2° *Expressions et valeurs numériques de* φ, Z *et* L. — Cherchons une solution de l'équation (1) sous la forme

$$i = I_{max}\cos(\omega t + \varphi) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi).$$

Dans ce cas, la dérivée $\frac{di}{dt}$ serait

$$\frac{di}{dt} = -\omega I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi) = \omega I\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

car $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$, et la primitive périodique sans terme constant de i serait

$$q = \int i\,dt = \frac{I\sqrt{2}}{\omega}\sin(\omega t + \varphi) = \frac{I\sqrt{2}}{\omega}\cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

puisque $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$.

En remplaçant dans (1) u et i par leurs expressions en fonction du temps, nous obtenons l'équation

$$(2)\quad U\cos(\omega t) = L\omega I\cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + RI\cos(\omega t + \varphi) + \frac{I}{C\omega}\cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

qui doit être vérifiée identiquement quel que soit t si $i = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ est bien la solution de l'équation (1).

- La fonction

$$RI\cos(\omega t + \varphi)$$

est, à chaque instant, égale à la projection sur l'axe Ox d'un vecteur $\overrightarrow{OA}$ de module $OA = RI$, formant avec Ox l'angle

$$(Ox, \overrightarrow{OA}) = \omega t + \varphi.$$

- La fonction

$$L\omega I\cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

mesure à chaque instant la projection sur Ox du vecteur $\overrightarrow{OB}$ de module $OB = L\omega I$,

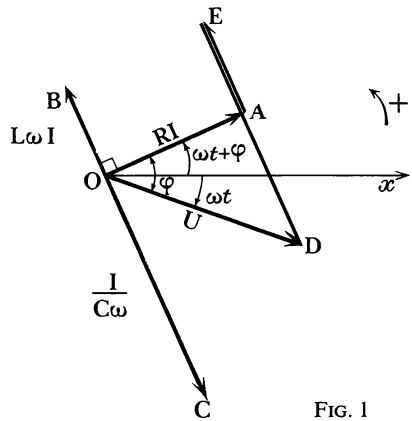


FIG. 1

tel que

$$(Ox, \overrightarrow{OB}) = \omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}.$$

- La fonction $\dfrac{I}{C\omega}\cos\left(\omega t + \varphi - \dfrac{\pi}{2}\right)$ est à chaque instant la projection sur Ox du vecteur $\overrightarrow{OC}$ de module $OC = \dfrac{I}{C\omega}$, formant avec Ox l'angle

$$(Ox, \overrightarrow{OC}) = \omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}.$$

- Enfin, la fonction $U\cos(\omega t)$ mesure à chaque instant la projection sur Ox du vecteur $\overrightarrow{OD}$ de module $OD = U$, tel que $(Ox, \overrightarrow{OD}) = \omega t$.

En projection sur Ox, nous avons donc

$$\text{proj}\,\overrightarrow{OD} = \text{proj}\,\overrightarrow{OA} + \text{proj}\,\overrightarrow{OB} + \text{proj}\,\overrightarrow{OC}.$$

Cette condition ne peut être satisfaite que si $\overrightarrow{OD}$ est la somme géométrique des trois autres vecteurs :

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Donc, nous devons obtenir le point D :

- en construisant le vecteur $\overrightarrow{AE}$ équipollent à $\overrightarrow{OB}$,
- puis en construisant le vecteur $\overrightarrow{ED}$ équipollent à $\overrightarrow{OC}$.

Nous avons bien

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}.$$

Observons que le triangle rectangle OAD tourne sans se déformer autour de O avec la vitesse angulaire ω. L'angle aigu $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})$ est constant :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}) = (Ox, \overrightarrow{OD}) - (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OA}) = -\varphi.$$

Ce triangle étant rectangle en A, nous avons les relations

$$\operatorname{tg}(-\varphi) = \frac{AD}{OA}, \qquad OD^2 = OA^2 + AD^2,$$

avec

$$AD = OB - OC.$$

a) Avance de phase de i sur u. – Cette avance est φ telle que

$$-\operatorname{tg}\varphi = \frac{AD}{OA} = \frac{OB - OC}{OA},$$

soit

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{OC - OB}{OA} = \frac{\dfrac{I}{C\omega} - IL\omega}{RI}.$$

Nous avons donc

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\dfrac{1}{C\omega} - L\omega}{R}.$$

L'angle φ reste compris dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$, car le point D appartient à la perpendiculaire élevée en A au vecteur OA. Nous pouvons écrire

$$\varphi = \operatorname{Arc\,tg}\frac{\dfrac{1}{C\omega} - L\omega}{R}.$$

Numériquement,

$$\varphi = \operatorname{Arc\,tg}\frac{\dfrac{1}{4.10^{-6} \times 100\pi} - 1 \times 100\pi}{500},$$

soit

$$\varphi \approx 0{,}767 \text{ rd}.$$

b) Impédance de la portion de circuit. – D'après le théorème de Pythagore, $OD^2 = OA^2 + (OB - OC)^2$. Nous avons donc

$$U^2 = R^2I^2 + \left(L\omega I - \frac{I}{C\omega}\right)^2.$$

Le rapport constant $Z = \frac{U}{I}$ est l'impédance du circuit. La relation précédente donne

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2}.$$

soit, *numériquement*,

$$Z = \sqrt{500^2 + \left(\frac{1}{4.10^{-6} \times 100\pi} - 1 \times 100\pi\right)^2},$$

ou $$Z \approx 694\ \Omega.$$

c) Valeur efficace de l'intensité du courant. — Nous avons

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2}}$$

et, *numériquement*, $I = \frac{220}{694} = 0{,}317$ A.

3° ***Résonance.*** — Le déphasage φ est nul si

$$\frac{1}{C\omega_0} - L\omega_0 = 0,$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Dans ce cas, l'impédance se réduit à la résistance :

$$Z = R = 500\ \Omega$$

et l'intensité efficace est $I_0 = \frac{U}{R} = \frac{220}{500} = 0{,}44$ A.

La fréquence de résonance est

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 \times 4.10^{-6}}} \approx 79{,}6 \text{ Hz}.$$

La période de résonance est $\tau_0 = \frac{1}{\nu_0} = 2\pi\sqrt{LC}$, soit

$$\tau_0 = \frac{1}{79{,}6} \approx 1{,}26.10^{-2} \text{ s}.$$

4° ***Coefficient de surtension.*** — En posant $Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}$, nous avons

$$\frac{L}{R} = \frac{Q}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \frac{1}{RC} = Q\omega_0.$$

Or, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{1}{RC\omega} - \dfrac{L\omega}{R}$. Nous pouvons écrire

$$\operatorname{tg}\varphi = Q\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right).$$

L'impédance s'écrit

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2} = R\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}.$$

Nous obtenons donc

$$\frac{Z}{R} = \sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}.$$

Allure des courbes tg φ *et* $\dfrac{Z}{R}$ *en fonction de* X. — La pulsation ω étant toujours positive la variable $X = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ varie de 0 (pour $\omega = 0$) à $+\infty$.

La dérivée par rapport à X de $\operatorname{tg}\varphi = Q\left(\dfrac{1}{X} - X\right)$ est

$$\frac{d(\operatorname{tg}\varphi)}{dX} = -Q\left(\frac{1}{X^2} + 1\right).$$

Nous obtenons le tableau de variations suivant :

X	0		1		$+\infty$
$\dfrac{d(\operatorname{tg}\varphi)}{dX}$	$-\infty$	↗	$-2Q$	↗	$-Q$
$\operatorname{tg}\varphi$	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

Nous voyons que la pente tend vers $-Q$ si $X \to +\infty$. Considérons la droite $Y = -QX$, et formons la différence

$$Y - \operatorname{tg}\varphi = -QX - \frac{Q}{X} + QX = -\frac{Q}{X}.$$

Nous avons donc $\operatorname{tg}\varphi - Y = \dfrac{Q}{X}$, et

$$\lim_{X=\infty}(\operatorname{tg}\varphi - Y) = 0.$$

Nous voyons que la courbe $\operatorname{tg}\varphi = Q\left(\dfrac{1}{X} - X\right)$, toujours située au-dessus de la droite $Y = -QX$, tend asymptotiquement vers cette droite pour $X = +\infty$.

La fonction $\frac{Z}{R} = \sqrt{1 + Q^2\left(\frac{1}{X} - X\right)^2} = \sqrt{1 + \text{tg}^2\,\varphi}$, infinie pour $X = 0$ et $X = +\infty$, passe par un minimum pour $X = 1$, lorsque $\text{tg}^2\,\varphi$ prend sa valeur minimale égale à 0. Ce minimum est $\frac{Z}{R} = 1$ (condition de résonance).

La figure 2, avec $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{500}\sqrt{\frac{1}{4.10^{-6}}} = 1$, montre l'allure des courbes tg φ et $\frac{Z}{R}$. Pour les petites valeurs de X, tg φ est beaucoup plus grand que 1 et $\frac{Z}{R} \approx \text{tg}\,\varphi$.

Pour les très grandes valeurs de X, considérons la droite $Y = QX$, et la différence

$$Y - \frac{Z}{R} = QX - \sqrt{1 + Q^2\left(\frac{1}{X} - X\right)^2},$$

soit

$$Y - \frac{Z}{R} = QX - \sqrt{1 + \frac{Q^2}{X^2} - 2Q^2 + Q^2X^2},$$

que nous pouvons écrire encore

$$Y - \frac{Z}{R} = QX - QX\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2X^2} - \frac{2}{X^2} + \frac{1}{X^4}}.$$

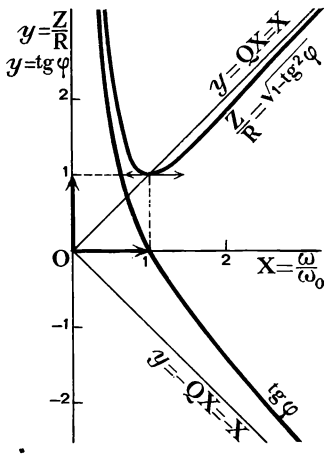


FIG. 2

Pour X très grand, le nombre $\varepsilon = \frac{1}{Q^2X^2} - \frac{2}{X^2} + \frac{1}{X^4}$ est très petit devant 1 et nous pouvons utiliser l'approximation

$$\sqrt{1 + \varepsilon} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il vient

$$Y - \frac{Z}{R} = QX - QX\left(1 + \frac{1}{2Q^2X^2} - \frac{1}{X^2} + \frac{1}{2X^4}\right),$$

soit, en négligeant le terme en X^4,

$$Y - \frac{Z}{R} = Q\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{2Q^2X}\right) = \frac{Q}{X}\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right).$$

Nous voyons que $Y - \frac{Z}{R}$ tend vers 0 si X tend vers l'infini. La courbe $\frac{Z}{R}$ tend donc asymptotiquement vers $Y = QX$ si X tend vers l'infini.

B) Mécanique

1° ***Équation différentielle du mouvement.*** – Le centre de gravité de la plaque se meut comme un point matériel de masse m soumis aux forces $\vec{f}$, $\vec{F}'$ et $\vec{F}''$. Son accélération $\vec{\gamma}$ vérifie l'équation

$$m\vec{\gamma} = \vec{f} + \vec{F}' + \vec{F}''.$$

En projections sur l'axe $x'x$, nous avons

$$m\gamma = F \cos \omega t - rv - kx.$$

Or, la projection de la vitesse est $v = \dfrac{dx}{dt}$ et celle de l'accélération est

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Nous obtenons l'équation

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = F \cos \omega t.$$

Nous pouvons aussi conserver la vitesse v comme fonction inconnue. La fonction x est alors une primitive de la vitesse $x = \int v\,dt$. Il vient

$$m\frac{dv}{dt} + rv + k\int v\,dt = F \cos \omega t. \tag{3}$$

2° ***Détermination de*** φ, **V** ***et*** $\mathbf{Z_m}$. – Cherchons une solution de la forme

$$v = V \cos (\omega t + \varphi).$$

Nous aurons, comme dans la première partie,

$$\frac{dv}{dt} = \omega V \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

et $\displaystyle\int v\,dt = \frac{V}{\omega} \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$, en considérant la primitive dépourvue de terme constant.

Les constantes V et φ devront être choisies de manière que l'équation

$$m\omega V \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + rV \cos (\omega t + \varphi) + \ldots + \frac{kV}{\omega} \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = F \cos \omega t \tag{4}$$

soit vérifiée identiquement, quel que soit t.

Nous serons amenés à considérer les vecteurs

$\overrightarrow{OA}$, de module $OA = rV$, tel que $(Ox, \overrightarrow{OA}) = \omega t + \varphi$,

$\overrightarrow{OB}$, de module $OB = m\omega V$, tel que $(Ox, \overrightarrow{OB}) = \omega t + \varphi + \dfrac{\pi}{2}$,

$\overrightarrow{OC}$, de module $OC = \dfrac{kV}{\omega}$, tel que $(Ox, \overrightarrow{OC}) = \omega t + \varphi + \dfrac{\pi}{2}$,

$\overrightarrow{OD}$, de module $OD = F$, tel que $(Ox, \overrightarrow{OD}) = \omega t$.

Les termes de l'équation (4) étant les projections de ces vecteurs sur Ox, nous aurons encore l'équation vectorielle $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$, et nous serons amenés à la construction de la figure 3, effectuée à l'instant t tel que $\omega t + \varphi = 0$.

a) Avance de phase de la vitesse sur la force f. — Cette avance φ vérifie la relation

$$\operatorname{tg}(-\varphi) = \frac{AD}{OA} = \frac{m\omega - \dfrac{k}{\omega}}{r},$$

soit

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\dfrac{k}{\omega} - m\omega}{r}.$$

Sa valeur est donc

$$\varphi = \operatorname{Arc\,tg} \frac{\dfrac{k}{\omega} - m\omega}{r}$$

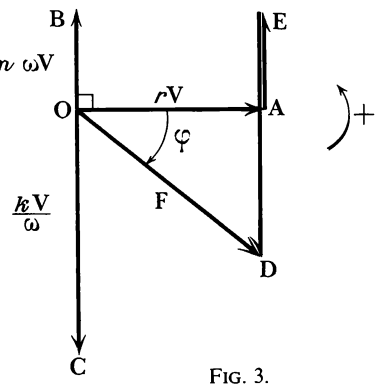


FIG. 3.

b) Valeur maximale de la vitesse. — Nous avons encore

$$AD^2 = OA^2 + AD^2 = OA^2 + (OB - OC)^2,$$

soit $F^2 = V^2\left[r^2 + \left(m\omega - \dfrac{k}{\omega}\right)^2\right]$. La valeur maximale de la vitesse est donc

$$V = \frac{F}{\sqrt{r^2 + \left(m\omega - \dfrac{k}{\omega}\right)^2}} = \frac{F}{r\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}}.$$

c) Impédance mécanique. — C'est le rapport $Z_m = \dfrac{F}{V}$, qui vaut ici

$$Z_m = \sqrt{r^2 + \left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2} = r\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}.$$

Applications numériques. — Il vient

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\dfrac{3\,920}{100\,\pi} - 0{,}01 \times 100\pi}{10} = 0{,}934, \quad \text{soit} \quad \varphi = 0{,}751 \text{ rd};$$

$$V = \frac{10}{10\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}} = 0{,}731 \text{ m.s}^{-1};$$

$$Z_m = r\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} = 13{,}7 \text{ SI}.$$

Z_m est le quotient d'une force, de dimension MLT^{-2}, par une vitesse, de dimension LT^{-1}. La dimension de Z_m est donc $\frac{MLT^{-2}}{LT^{-1}} = MT^{-1}$, et l'unité SI est le $kg.s^{-1}$. Il vient

$$Z_m = 13{,}7 \text{ kg.s}^{-1}.$$

3° ***Résonance.*** – Le déphasage est nul pour ω_0 tel que $\frac{k}{\omega_0} - m\omega_0 = 0$, soit $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, soit

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\,920}{0{,}01}} = 626 \text{ rd.s}^{-1}.$$

Pour cette valeur, la vitesse maximale est

$$V_0 = \frac{F}{r} = 1 \text{ m.s}^{-1}.$$

N.B. – La pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ est celle que l'on obtiendrait en faisant vibrer librement le système. Nous voyons que la résonance est obtenue avec une fréquence d'excitation identique à la fréquence propre du résonateur.

4° ***Introduction de Q_m.*** – Avec $Q_m = \frac{m\omega_0}{r} = \frac{k}{r\omega_0}$, nous avons encore

$$\text{tg } \varphi = \frac{k}{r\omega} - \frac{m\omega}{r} = Q_m\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

et

$$\frac{Z_m}{r} = \sqrt{1 + \text{tg}^2\,\varphi} = \sqrt{1 + Q_m^2\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}.$$

Numériquement, nous avons ici

$$Q_m = \frac{m\omega_0}{r} = \frac{m}{r}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\sqrt{km}}{r} = \frac{\sqrt{3\,920 \times 0{,}01}}{10} = 0{,}626 \text{ (SI)}.$$

L'unité SI correspond, pour Q_m, à la dimension

$$\frac{\sqrt{MT^{-2} \times M}}{MT^{-1}} = 1.$$

C'est un nombre sans dimension

$$Q_m = 0{,}626.$$

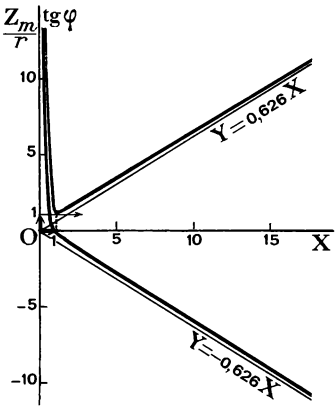


FIG. 4

Les courbes représentatives de tg φ et $\frac{Z_m}{r}$ en fonction de $X = \frac{\omega}{\omega_0}$ sont analogues à celles obtenues à la première partie.

Nous avons encore, pour tg φ, les asymptotes

$$X = 0 \quad \text{et} \quad Y = -Q_m X$$

et pour $\frac{Z_m}{r}$ les asymptotes

$$X = 0 \quad \text{et} \quad Y = Q_m X.$$

Mais, pour cette dernière asymptote, avec $Q_m = 0{,}626$, nous avons, au voisinage de $X = +\infty$.

$$Y - \frac{Z_m}{r} = \frac{Q_m}{X}\left(1 - \frac{1}{2Q_m^2}\right) = \frac{0{,}626}{X}(1 - 1{,}276) < 0.$$

La courbe $\frac{Z_m}{r}$ est donc au-dessus de son asymptote pour X tendant vers l'infini (*fig.* 4).

C) Comparaison des équations (1) et (3) :

(1) $$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = u,$$

(3) $$m\frac{dv}{dt} + rv + k\int v\,dt = f.$$

Nous constatons que ces deux équations ont exactement la même forme. La masse joue le rôle de l'inductance, la constante r de frottement intervient comme la résistance (observons que, dans les deux cas, cette intervention se traduit par la transformation en chaleur d'énergie électrique ou mécanique), et l'inverse de la capacité s'identifie au coefficient de raideur du système mécanique.

La tension électrique joue le rôle de la force, et l'intensité du courant joue celui de la vitesse.

Les résultats obtenus sont exactement symétriques :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R} = \frac{\frac{k}{\omega} - m\omega}{r},$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{k}{\omega} - m\omega\right)^2},$$

$$I = \frac{U}{Z}; \qquad V = \frac{F}{Z_m}.$$

La grandeur Z_m est **l'impédance mécanique** du système.

Tableau récapitulatif :

Grandeurs électriques	R	L	C	i	q
Grandeurs mécaniques	r	m	$\frac{1}{k}$	v	x

19

1. – Impédance d'un circuit inductif (R, L).
2. – *Impédance d'un circuit* (R, L, C *série*)

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}.$$

3. – Coefficient de surtension.
4. – Résonance.
5. – *Courbe de résonance :* $\frac{I}{I_0} = f(C - C_0)$.
6. – Acuité de cette courbe.

Dans tout le problème, la pulsation ω et la valeur efficace U de la tension sinusoïdale aux bornes des circuits envisagés sont supposées constantes.

1° La tension U étant appliquée aux bornes d'une portion de circuit de résistance R et d'inductance L, donner, sans démonstration, l'expression de l'intensité efficace I_1.

2° Dans la portion de circuit précédente, on monte, en série avec R et L, un condensateur variable; sa capacité C est réglée de façon que l'intensité efficace dans le circuit soit maximale. Soit C_0 et I_0 les valeurs correspondantes de C et de l'intensité efficace.

a) Donner les expressions de I_0 et de la tension efficace U_C aux bornes du condensateur.

b) Dans ces conditions, on appellera coefficient de surtension le rapport $Q_0 = \frac{U_C}{U}$. Donner son expression en fonction de R, L et ω.

c) Donner l'expression du rapport $\frac{I_1}{I_0}$ en fonction de Q_0.

Calculer ce rapport pour $Q_0 = 100$.

3° La capacité C varie, ce qui entraîne des variations de l'intensité efficace I dans le circuit.

a) Calculer, en nanofarads (1 nanofarad $= 10^{-9}$ farad), la valeur C_0 pour $I = I_0$.
On donne $R = 10\,\Omega$; $L = 10^{-3}$ H ($Q_0 = 100$).

b) L'intensité I étant telle que $\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ($n \geqslant 1$ et petit devant Q_0), donner, en fonction de Q_0 et n, les expressions du rapport $\frac{C}{C_0}$ et de la variation relative $\frac{C - C_0}{C_0}$.

Dans ce but, on pourra écrire le rapport $\frac{I}{I_0}$ en exprimant I et I_0 en fonction de U et des impédances.

c) Construire, directement sur la copie, la partie de la courbe représentant les variations de $\frac{I}{I_0}$ en fonction de $C - C_0$ à partir des points correspondant aux valeurs de n suivantes : 1, 2, 3, 4, 5.

En ordonnée, $\frac{I}{I_0} = 1$ représenté par 10 cm; en abscisse, $C - C_0 = 0{,}01$ nanofarad représenté par 2 cm.

d) Dire, sans calculs, comment se modifie l'allure de la courbe précédente si Q_0 diminue. Comment pourrait-on réaliser cette diminution ?

(Bacc. C et E. Strasbourg, juin 1975)

1° Intensité efficace I_1. — L'impédance d'une portion de circuit de résistance R et d'inductance L, pour la pulsation ω, est $Z_1 = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$. Si l'on applique une tension efficace U aux bornes de ce circuit, l'intensité efficace est

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}.$$

2° a) Valeurs de I_0 et U_c dans les conditions de résonance. — L'impédance d'une portion de circuit de résistance R, d'inductance L et de capacité C est

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}.$$

L'intensité efficace est, pour la tension U,

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}.$$

L'intensité efficace est maximale (résonance) si la capacité C prend la valeur C_0 telle que $L\omega - \frac{1}{C_0\omega} = 0$. La valeur de l'intensité efficace est alors

$$I_0 = \frac{U}{R}.$$

L'impédance du condensateur étant $Z_C = \frac{1}{C_0\omega}$, la tension efficace entre ses bornes est

$$U_C = Z_C I_0 = \frac{U}{RC_0\omega}.$$

Avec $C_0 = \frac{1}{L\omega^2}$ (résonance), nous avons encore

$$U_C = U\frac{L\omega}{R}.$$

***b)* Expression du coefficient de surtension.** – C'est le rapport

$$Q_0 = \frac{U_C}{U} = \frac{1}{RC_0\omega} = \frac{L\omega}{R}.$$

***c)* Rapport des intensités I_1 et I_0.** – La valeur de ce rapport est

$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \times \frac{R}{U} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}.$$

En divisant par R les deux termes de l'expression, il vient

$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{L^2\omega^2}{R^2}}},$$

soit

$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_0^2}}.$$

Pour $Q_0 = 100$, nous avons

$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + 100^2}} \approx \frac{1}{100}.$$

3° *a)* Valeur de la capacité C_0. – La capacité de résonance est $C_0 = \dfrac{1}{L\omega^2}$. Pour calculer C_0, nous devons connaître la pulsation de résonance, que nous pouvons calculer à partir de Q_0 :

$$Q_0 = \frac{L\omega}{R}, \qquad \text{donc} \qquad \omega = \frac{RQ_0}{L}.$$

Il vient

$$C_0 = \frac{1}{L} \cdot \frac{L^2}{R^2Q_0^2} = \frac{L}{R^2Q_0^2}.$$

Numériquement, il vient

$$C_0 = \frac{10^{-3}}{10^2 \times 100^2} = 10^{-9}\ \text{F} = 1\ \text{nF}.$$

***b)* Expression du rapport $\dfrac{C}{C_0}$.** – Les intensités efficaces pour C et C_0 sont, respectivement

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}} \quad \text{et} \quad I_0 = \frac{U}{R}.$$

Le rapport $\dfrac{I}{I_0} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ s'écrit donc

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}} \times \frac{R}{U} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}.$$

Au second membre, en divisant par R les deux termes de la fraction, nous obtenons

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{L\omega}{R} - \dfrac{1}{RC\omega}\right)^2}}.$$

En élevant au carré, nous avons

$$n = 1 + \left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)^2,$$

soit

$$\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)^2 = n - 1$$

et, puisque n est supérieur ou égal à 1, nous pouvons écrire

$$\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega} = \pm\sqrt{n-1}.$$

Nous avons vu (question 2°, *b*) que

$$Q_0 = \frac{L\omega}{R} = \frac{1}{RC_0\omega},$$

donc $\dfrac{1}{RC\omega} = Q_0\dfrac{C_0}{C}$, et nous pouvons écrire

$$Q_0 - Q_0\frac{C_0}{C} = \varepsilon\sqrt{n-1}, \qquad \text{avec} \qquad \varepsilon = \pm 1.$$

Nous en déduisons l'expression du rapport $\dfrac{C}{C_0}$:

$$\frac{C}{C_0} = \frac{1}{1 - \dfrac{\varepsilon\sqrt{n-1}}{Q_0}}.$$

Nous savons que $n \geqslant 1$ est petit devant Q_0; donc, $\dfrac{\varepsilon\sqrt{n-1}}{Q_0}$ est petit devant 1 et nous obtenons l'expression approchée

$$\frac{C}{C_0} \approx 1 + \frac{\varepsilon\sqrt{n-1}}{Q_0}.$$

La variation relative de la capacité prend alors la forme simple

$$\frac{C - C_0}{C_0} = \frac{C}{C_0} - 1 = \frac{\varepsilon\sqrt{n-1}}{Q_0}.$$

c) **Variations de $\frac{I}{I_0}$.** – Nous savons que $\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Par ailleurs

$$\varepsilon\sqrt{n-1} = Q_0\frac{C - C_0}{C_0},$$

donc

$$n - 1 = \left(\frac{Q_0}{C_0}\right)^2 (C - C_0)^2,$$

ou

$$n = 1 + \left(\frac{Q_0}{C_0}\right)^2 (C - C_0)^2.$$

Le rapport des intensités efficaces, toujours positif, s'écrit, en fonction de $C - C_0$,

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{Q_0}{C_0}\right)^2 (C - C_0)^2}}.$$

Nous pouvons calculer les valeurs de $\frac{I}{I_0}$ à partir des valeurs de n par la relation initiale

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Par ailleurs, nous avons

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{Q_0}{C_0}\right)^2 (C - C_0)^2}},$$

soit encore

$$1 + \left(\frac{Q_0}{C_0}\right)^2 (C - C_0)^2 = n,$$

c'est-à-dire

$$C - C_0 = \pm\left(\frac{C_0}{Q_0}\right)\sqrt{n-1},$$

soit, *numériquement*,

$$C - C_0 = \pm\left(\frac{10^{-9}}{100}\right)\sqrt{n-1} = \pm 10^{-11}\sqrt{n-1}.$$

En exprimant C et C_0 en nanofarads, cette dernière expression s'écrit

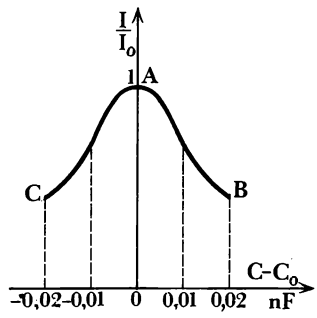
$$(C - C_0)_{nF} = \pm\frac{\sqrt{n-1}}{Q_0} = \pm\frac{\sqrt{n-1}}{100}.$$

Nous pouvons alors dresser le tableau des valeurs de $\frac{I}{I_0}$ (en ordonnée) et de $(C - C_0)_{nF}$ (en abscisse) :

n	1	2	3	4	5
$\frac{I}{I_0}$	1	0,707	0,577	0,5	0,447
$C - C_0$ (nanofarads)	0	± 0,01	± 0,014 14	± 0,017 32	± 0,02

Nous obtenons la courbe de la figure ci-dessous.

d) **Modification d'allure de la courbe si Q_0 diminue.** — Pour les mêmes valeurs de $\frac{I}{I_0}$, donc de n, la diminution de Q_0 fait croître la différence $|C - C_0|$.



Pour $|C - C_0|$ constant, si Q_0 décroît, nous voyons que $\sqrt{n-1} = \frac{Q_0}{C_0}|C - C_0|$ décroît; donc $\sqrt{n}$ décroît aussi et $\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ croît. Le point A restant fixe, les branches AB et AC se soulèvent également et la courbe CAB tend à s'aplatir. La résonance devient moins aiguë.

La relation $Q_0 = \frac{L\omega}{R}$ montre que, pour faire décroître Q_0, il suffit d'augmenter la résistance du circuit si l'inductance est constante ou bien de réduire l'inductance si la résistance est constante. On peut aussi, avec L et R constants, réduire la pulsation de la tension aux bornes du circuit.

Cette étude montre que, pour obtenir une résonance aiguë, il faut utiliser une bobine de forte inductance et de faible résistance, qui donne au circuit un fort coefficient de surtension.

20

1. – Impédance d'un circuit (R, L, C), d'un circuit (R, L) et d'un condensateur.

2. – Avance de phase de u sur i :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R}.$$

3. – Résonance; pulsation de résonance.

4. – *Puissance moyenne :* $P = UI \cos \varphi$.

5. – Coefficient de surtension.

6. – *Redressement du courant alternatif. Intensité efficace* du courant redressé.

Entre deux points A et B d'un circuit sont placés en série : une bobine de résistance R et d'inductance L, un condensateur de capacité C. On maintient entre A et B une différence de potentiel fonction sinusoïdale du temps t, de fréquence f, de pulsation ω et de valeur instantanée (exprimée en volts) $u = 30\sqrt{2} \sin \omega t$.

A) Quelle est l'indication donnée par un voltmètre de grande impédance placé en dérivation entre A et B ?

Ce même voltmètre placé en dérivation successivement entre les bornes de la bobine et celles du condensateur indique les tensions respectives suivantes : $U_1 = 40$ volts et $U_2 \doteq 14$ volts. L'intensité efficace du courant dans AB est $I = 0{,}100$ A.

1° En déduire les valeurs des impédances Z du tronçon AB, Z_1 de la bobine et Z_2 du condensateur.

2° Rappeler les expressions littérales donnant Z, Z_1 et Z_2 en fonction des caractéristiques du circuit.

3° Calculer la valeur numérique des grandeurs $\dfrac{L}{C}$, $L\omega$ et R.

4° Quel est le déphasage de l'intensité instantanée i du courant par rapport à la tension u appliquée entre A et B ?

B) En faisant varier la fréquence, on remarque que l'intensité efficace passe par une valeur maximale I_0 pour la fréquence $f_0 = 250$ hertz.

En déduire les valeurs

1° de l'inductance L et de la capacité C;

2° de la fréquence f et de l'intensité efficace I_0.

En utilisant les valeurs numériques nécessaires, donner l'expression, en fonction du temps, de l'intensité i du courant de fréquence f ainsi que celle i_0 du courant de fréquence f_0.

C) 1° Quelle est la puissance moyenne P_0 consommée dans la portion AB parcourue par le courant d'intensité efficace I_0 et de fréquence f_0 ?

2° Lorsque la puissance moyenne consommée dans AB est le quart de la puissance P_0, établir la relation simple qui lie l'impédance Z de AB à la résistance R de la bobine. En déduire les deux valeurs possibles f_1 et f_2 de la fréquence du courant. (Pour calculer ces deux fréquences il est conseillé de poser $x_1 = \frac{f_1}{f_0}$ et $x_2 = \frac{f_2}{f_0}$.)

3° Citer un dispositif permettant de supprimer une alternance sur deux du courant sinusoïdal de fréquence f_0. On suppose que l'intensité maximale conserve sa valeur. Calculer l'intensité efficace du courant variable obtenu.

(Bacc. C et E. Nantes. juin 1976)

A) Indication donnée par le voltmètre. — Le voltmètre indique la tension efficace $U = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$ existant entre A et B, soit ici $U = 30$ V.

1° ***Impédances.*** — L'impédance du tronçon AB est

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{30}{0{,}1} = 300\ \Omega.$$

Celle de la bobine est

$$Z_1 = \frac{U_1}{I} = \frac{40}{0{,}1} = 400\ \Omega,$$

et l'impédance du condensateur est

$$Z_2 = \frac{U_2}{I} = \frac{14}{0{,}1} = 140\ \Omega.$$

2° ***Expressions littérales de ces impédances.*** — Pour la pulsation ω, nous avons

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2};$$

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2};$$

$$Z_2 = \frac{1}{C\omega}.$$

3° ***Valeurs numériques de*** $\frac{L}{C}$, $L\omega$ ***et*** **R.** — Élevons les impédances au carré :

$$Z^2 = R^2 + L^2\omega^2 - 2\frac{L}{C} + \frac{1}{C^2\omega^2},$$

$$Z_1^2 = R^2 + L^2\omega^2,$$

$$Z_2^2 = \frac{1}{C^2\omega^2}.$$

Nous avons la relation évidente :

$$Z^2 = Z_1^2 - 2\frac{L}{C} + Z_2^2,$$

soit

$$\frac{L}{C} = \frac{Z_1^2 + Z_2^2 - Z^2}{2}.$$

On obtient

$$\frac{L}{C} = \frac{400^2 + 140^2 - 300^2}{2} = 4{,}48.10^4 \text{ (SI)}.$$

Posons $X = \frac{L}{C} = 4{,}48.10^4$ SI. Nous avons donc $C = \frac{L}{X}$. En portant cette expression dans Z_2, il vient

$$Z_2 = \frac{X}{L\omega}, \qquad \text{soit} \qquad L\omega = \frac{X}{Z_2}.$$

Numériquement, il vient $L\omega = \frac{4{,}48.10^4}{140} = 320\ \Omega$.

Enfin, nous avons $R^2 = Z_1^2 - L^2\omega^2$, soit

$$R = \sqrt{Z_1^2 - L^2\omega^2} = \sqrt{400^2 - 320^2} = 240\ \Omega.$$

4° *Déphasage de l'intensité par rapport à la tension.* – L'intensité est en retard sur la tension de l'angle φ tel que

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}.$$

Nous connaissons $L\omega$, R et $\frac{1}{C\omega} = Z_2$.

Nous obtenons $\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - Z_2}{R} = \frac{320 - 140}{240} = 0{,}75$.

L'intensité est donc en retard sur la tension de l'angle $\varphi = 0{,}643\,5$ rd, ou $\varphi = 36°52'12''$.

B) 1° *Calcul de* L *et* C. – La résonance est obtenue pour la pulsation $\omega_0 = 2\pi f_0 = 500\pi$ rd.s^{-1}. Nous avons, entre L et C, la relation de résonance $LC\omega_0^2 = 1$, soit

$$(1) \qquad LC = \left(\frac{1}{500\pi}\right)^2.$$

Nous avons obtenu à la question A)

$$(2) \qquad \frac{L}{C} = 4{,}48.10^4.$$

En formant le produit membre à membre des équations (1) et (2), nous obtenons

$$L^2 = \frac{4{,}48.10^4}{(500\pi)^2}, \qquad \text{soit} \qquad L = \frac{10^2\sqrt{4{,}48}}{500\pi} = \frac{\sqrt{4{,}48}}{5\pi},$$

soit L = 0,135 H.

En formant le quotient membre à membre de (1) par (2), nous obtenons

$$C^2 = \frac{1}{(500\pi)^2 \times 4{,}48.10^4},$$

soit

$$C = \frac{1}{500\pi \times 100\sqrt{4{,}48}} = 3{,}01.10^{-6}\ \text{F} \approx 3\ \mu\text{F}.$$

2° ***Calcul de f et*** I_0. — Pour la fréquence f, nous avons obtenu, à la question A), 3°, $L\omega = 320\ \Omega$. Or, $\omega = 2\pi f$. La fréquence était donc

$$f = \frac{320}{2\pi L} = \frac{320}{2\pi \times 0{,}135} = 377\ \text{Hz}.$$

Pour la fréquence f_0, nous avons la résonance et $Z_0 = R$. L'intensité efficace est, dans ce cas,

$$I_0 = \frac{U}{Z_0} = \frac{U}{R} = \frac{30}{240} = 0{,}125\ \text{A}.$$

Expressions des courants i et i_0. — L'intensité maximale est

$$I\sqrt{2} = 0{,}1\sqrt{2} = 0{,}141\ \text{A}$$

pour le courant de fréquence f et de pulsation

$$\omega = \frac{320}{0{,}135} = 2\,370\ \text{rd.s}^{-1}.$$

Nous avons vu que ce courant est en retard de 0,643 5 rd sur la tension u. Nous avons donc

$$u = 30\sqrt{2}\sin(2\,370t),$$
$$i = 0{,}141\sin(2\,370t - 0{,}643\,5).$$

Pour le courant de fréquence f_0, de pulsation

$$\omega_0 = 500\pi = 1\,571\ \text{rd.s}^{-1},$$

l'intensité efficace est $I_0\sqrt{2} = 1{,}25\sqrt{2} = 1{,}77$ A, et ce courant est en phase avec la tension. Nous avons alors

$$u_0 = 30\sqrt{2}\sin(1\,571t),$$
$$i_0 = 1{,}77\sin(1\,571t).$$

C) 1° ***Puissance moyenne consommée dans le cas du courant de fréquence*** f_0. — Cette puissance est $P_0 = UI_0\cos\varphi_0 = UI_0$, puisque $\varphi_0 = 0$.

Nous avons donc $P_0 = 30 \times 1{,}25 = 37{,}5$ W

2° ***Lorsque le circuit consomme la puissance*** $\frac{P_0}{4}$. — La fréquence n'est plus celle de résonance, et il existe entre u et i le déphasage φ. La puissance est

$$UI \cos \varphi = \frac{UI_0}{4}.$$

Or, $I = \frac{U}{Z}$ et $\cos \varphi = \frac{R}{Z}$. De même, $I_0 = \frac{U}{R}$. Nous avons donc

$$\frac{U^2R}{Z^2} = \frac{U^2}{4R}, \quad \text{soit} \quad \frac{R^2}{Z^2} = \frac{1}{4}.$$

D'autre part, $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$. La pulsation ω doit donc vérifier l'équation

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)^2} = \frac{1}{4},$$

soit

$$\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)^2 = 3.$$

A la résonance (pulsation ω_0), nous avons $L\omega_0 = \frac{C\omega_0}{1}$. Introduisons le coefficient de surtension :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}.$$

La condition précédente devient

$$Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 3.$$

En posant alors $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. Nous avons l'expression

$$x - \frac{1}{x} = \pm \frac{\sqrt{3}}{Q}.$$

La valeur du coefficient de surtension est ici

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{\sqrt{4,48}}{5\pi} \times \frac{500\pi}{240} = \frac{\sqrt{4,48}}{2,4} = 0,882.$$

Les valeurs de x sont les racines positives des équations

$$x - \frac{1}{x} = \pm \frac{\sqrt{3}}{0,882} = \pm 1,964.$$

Ces équations s'écrivent

$$x^2 - 1,964x - 1 = 0; \qquad x^2 + 1,964x - 1 = 0.$$

Elles ont toujours des racines puisque les coefficients a et c sont de signes contraires. Les racines positives sont

$$x_1 = \frac{1{,}964 + \sqrt{(1{,}964)^2 + 4}}{2} = 2{,}383\,5 \text{ pour la première}$$

et

$$x_2 = \frac{-1{,}964 + \sqrt{(1{,}964)^2 + 4}}{2} = 0{,}419\,5 \text{ pour la seconde.}$$

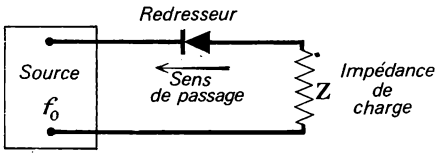
Nous en déduisons les fréquences :

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{\omega_1}{\omega_0} = x_1; \qquad \frac{f_2}{f_0} = \frac{\omega_2}{\omega_0} = x_2.$$

Il vient

$$f_1 = x_1 f_0 = 2{,}384 \times 250 = 596 \text{ Hz},$$
$$f_2 = x_2 f_0 = 0{,}419\,5 \times 250 = 104{,}9 \approx 105 \text{ Hz}.$$

3° ***Dispositif permettant de supprimer une alternance sur deux du courant.*** — Il est possible d'utiliser une diode, ou un redresseur oxymétal, ou une jonction $p - n$ obtenue en mettant en contact deux éléments semi-conducteurs. Le courant peut circuler dans un sens, mais est arrêté dans l'autre.



Si l'intensité maximale garde la valeur $I_{max} = I_0\sqrt{2}$, l'intensité instantanée est

$$i = \begin{cases} I_0\sqrt{2}\sin\omega_0 t, & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{T}{2}, \\ 0, & \text{si} \quad \dfrac{T}{2} \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

la lettre T désignant la période $\left(T = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}\right)$.

La quantité de chaleur produite pendant une période par le passage du courant dans une résistance R est

$$W_1 = \int_0^T Ri^2\,dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} Ri^2\,dt.$$

Mais l'intensité étant nulle pendant la seconde alternance, nous devons écrire

$$W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{\omega_0}} 2RI_0^2 \sin^2 \omega_0 t \, dt + 0 = \int_0^{\frac{\pi}{\omega_0}} 2RI_0^2 \sin^2 \omega_0 t \, dt,$$

car la fonction à intégrer est nulle dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{\omega_0}, \frac{2\pi}{\omega_0}\right]$.

Mais $\sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\omega_0 t)$. Il vient

$$W_1 = RI_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{\omega_0}} dt - RI_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{\omega_0}} \cos(2\omega_0 t) \, dt,$$

soit

$$W_1 = \frac{\pi RI_0^2}{\omega_0} - \frac{RI_0^2}{2\omega_0} \left[\sin(2\omega_0 t)\right]_0^{\frac{\pi}{\omega_0}}.$$

La seconde expression est nulle. Il reste $W_1 = \frac{\pi RI_0^2}{\omega_0}$. Soit I_{eff} l'intensité du courant continu qui, pendant la durée d'une période, produirait la même quantité de chaleur que le courant redressé, en traversant la même résistance R.

Nous aurions

$$W_1 = RI_{eff}^2 . T = \frac{2\pi}{\omega_0} RI_{eff}^2.$$

En comparant les deux expressions de W_1, nous obtenons

$$I_{eff}^2 = \frac{I_0^2}{2},$$

soit

$$I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{1{,}25}{\sqrt{2}} = 0{,}884 \text{ A}.$$

On peut encore dire que l'intensité efficace du courant redressé réduit à une alternance est

$$I_{eff} = \frac{I_{max}}{2},$$

puisque

$$I_0 = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}.$$

REMARQUE. – Ce résultat peut-être obtenu par les considérations suivantes :
Les deux alternances du courant $i = I_{max} \sin(\omega_0 t)$ sont équivalentes en ce qui concerne la production de chaleur par effet Joule, puisque cet effet ne dépend pas du sens du courant.

Donc, si, pendant le temps t, le courant alternatif total produisait la quantité de chaleur

$$W = RI_0^2 t,$$

le courant redressé ne produit plus, dans le même temps, que la quantité de chaleur

$$\frac{W}{2} = R \frac{I_0^2}{2} t.$$

Son intensité efficace est donc I_{eff} telle que

$$\frac{W}{2} = R \, . \, I_{eff}^2 \, t,$$

et nous avons

$$I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{1{,}25}{\sqrt{2}} = 0{,}884 \text{ A.}$$

21

1. – Impédance d'un circuit (R, L, C). Avance de phase de u sur i.
2. – Expression de la puissance moyenne.
3. – Graphe $P = f(R)$.
4. – Résonance.
5. – *Bande passante;* limites de cette bande.

On applique une tension sinusoïdale de valeur efficace U et de pulsation ω aux bornes d'un circuit comprenant en série une résistance R, une inductance L et un condensateur de capacité C.

A) On considérera les valeurs suivantes :

$$U = 0{,}2\ V, \quad L = 2.10^{-3}\ H, \quad R = 6, \quad \omega = \omega_1 = 30{,}15.10^3\ rd/s.$$

Calculer les deux valeurs de C qui produisent entre intensité et tension un déphasage de $\frac{\pi}{4}$.

Quelles sont les intensités efficaces dans les deux cas ?

On utilise *dans la suite du problème* la valeur de C pour laquelle la tension est en *retard* de phase sur l'intensité.

B) On étudie comment varie, en fonction de R, la puissance P consommée dans la portion de circuit.

1° Construire la courbe $P = f(R)$ dans le cas où U, L, C et ω_1 ont les valeurs de la question précédente.

On fera varier R de 0 à 15 Ω, et l'on tracera le graphe directement sur la copie.

Pour quelle valeur de R la puissance consommée est-elle maximale ?

2° Montrer que dans tous les cas, c'est-à-dire pour des valeurs quelconques mais constantes de U, L, C, ω $\left(\text{sauf pour celles qui annulent la quantité } L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$ la puissance maximale obtenue par le choix convenable de R correspond toujours à un déphasage de $\frac{\pi}{4}$ entre intensité et tension.

3° A quel cas important correspond l'exception précédente ? Indiquer qualitativement, comment varie P en fonction de R dans ce cas. Quel est le déphasage entre u et i?

C) On fait varier la fréquence de la tension sinusoïdale appliquée au circuit R, L, C de la question A : $R = 6\ \Omega$, $L = 2.10^{-3}$ H, $C = 0{,}5\ \mu F$.

1° *a*) Calculer la pulsation ω_2 qui donne comme ω_1 un déphasage de $\frac{\pi}{4}$.

b) Calculer la pulsation ω_0 qui donne la résonance. Quelle est la fréquence f_0 correspondante ? On prendra $\pi^2 = 10$.

2° *a*) Calculer le rapport $\frac{I}{I_0}$ des intensités efficaces pour $\omega = \omega_1$ (ou ω_2) et $\omega = \omega_0$.

***b*) Calculer le rapport $\frac{P}{P_0}$ des puissances pour les mêmes valeurs de ω que ci-dessus.**

(Bacc. C et E, Nice, septembre 1975)

A) Valeurs de la capacité. — Le déphasage entre le courant et la tension prise comme référence est φ tel que

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R}.$$

Dans ce cas précis, nous cherchons à obtenir un déphasage de $\frac{\pi}{4}$ de signe quelconque, soit

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \pm 1$$

et finalement

$$\frac{1}{C\omega} = L\omega \pm R,$$

d'où $C = \frac{1}{\omega(L\omega \pm R)}$. Il va de soi que si $L\omega < R$, il n'y a qu'une solution positive donc admissible. Ici,

$$L\omega = 2.10^{-3} \times 30{,}15.10^{3} = 60{,}3\ \Omega$$

et $R = 6\ \Omega$. Il y a donc deux solutions :

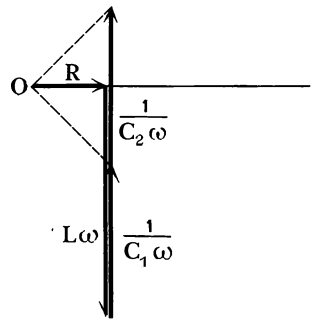


FIG. 1
(Représentation
de Fresnel approximative)

$$C_1 = \frac{1}{30{,}15.10^{3}\,(60{,}3 - 6)} = 6{,}108.10^{-7}\ \text{F, ou } 0{,}6108\ \mu\text{F}$$

correspondant à $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ et

$$C_2 = \frac{1}{30{,}15.10^{3}\,(60{,}3 + 6)} = 5{,}003.10^{-7}\ \text{F, soit environ } 0{,}5\ \mu\text{F}$$

correspondant à $\varphi = +\frac{\pi}{4}$. φ étant la phase de l'intensité par rapport à la tension, nous retiendrons pour la suite la valeur

$$C_2 \approx 0{,}5\ \mu\text{F}.$$

Dans les deux cas, le diagramme de Fresnel nous montre que $Z = R\sqrt{2}$. L'intensité efficace est donc $I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{R\sqrt{2}}$ et, *numériquement*,

$$I = \frac{0{,}2}{6\sqrt{2}} = 2{,}36.10^{-2}\ \text{A}.$$

B) Variations de la puissance en fonction de R.

1° ***Graphe.*** — La puissance consommée répond à la relation

$$P = UI \cos \varphi,$$

U et I étant les valeurs efficaces de la tension et de l'intensité.

D'autre part, $I = \frac{U}{Z}$, Z étant l'impédance du circuit, soit

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad \text{et} \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z}.$$

Nous avons donc

$$P = \frac{U^2 R}{Z^2} = U^2 \frac{R}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}.$$

U étant constante, le sens de variation de P sera celui de

$$\frac{R}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = \frac{P}{U^2},$$

soit le sens inverse des variations de

$$\frac{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}{R} = R + \frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}{R} = \frac{U^2}{P}.$$

La dérivée de $\frac{U^2}{P}$ est $\left(\frac{U^2}{P}\right)' = 1 - \frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}{R^2}$ qui s'annule par valeurs croissantes pour $R = \left|L\omega - \frac{1}{C\omega}\right|$.

Nous pouvons remplir un tableau de variations :

R	0		$\left\|L\omega - \frac{1}{C\omega}\right\|$		$+\infty$
$\left(\frac{U^2}{P}\right)'$	$-\infty$	$-$	0	$+$	1
$\frac{U^2}{P}$	$+\infty$	$\searrow$	$2R$	$\nearrow$	$+\infty$
P	0	$\nearrow$	$\frac{U^2}{2R}$	$\searrow$	0

D'après le choix fait au A), nous avons $\left| L\omega - \frac{1}{C\omega} \right| = 6\ \Omega$, d'où le graphe

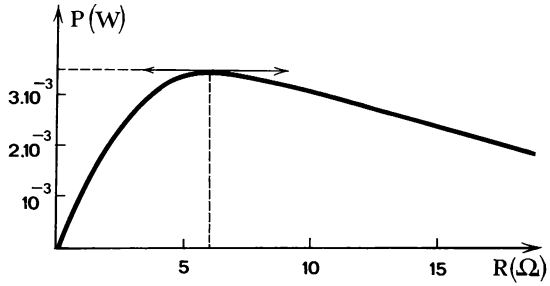


FIG. 2

P passe par un maximum $P_0 = 3{,}33.10^{-3}$ W pour

$$R = \left| L\omega - \frac{1}{C\omega} \right| = 6\ \Omega.$$

2° ***Déphasage au maximum.*** — Reprenons la plus simple des relations donnant φ, soit $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{\dfrac{1}{C\omega} - L\omega}{R}$.

Il apparaît clairement que, si $L\omega \neq \dfrac{1}{C\omega}$, la valeur de R correspondant à la puissance maximale nous conduit en général à $\operatorname{tg} \varphi = \pm 1$, et dans notre cas particulier où $\dfrac{1}{C\omega} > L\omega$, à $\operatorname{tg} \varphi = +1$, soit $\varphi = +\dfrac{\pi}{4} (\text{mod. } \pi)$.

3° ***Cas particulier où*** $\mathbf{L\omega = \dfrac{1}{C\omega}}$. — Le calcul du B), 1° reste valable et le maximum de puissance est obtenu pour $R = 0$. (La valeur correspondante de P est d'ailleurs infinie.)

Mais l'expression de $\operatorname{tg} \varphi$ nous conduit à une forme indéterminée du type $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{0}{0}$.

En fait, pour $L\omega = \dfrac{1}{C\omega}$, nous observons le phénomène de résonance. Le circuit se comporte globalement comme s'il comportait seulement la résistance R et nous avons $P = \dfrac{U^2}{R}$ avec en permanence $\varphi = 0$.

La valeur calculée $R = 0$ n'est en fait qu'une fiction mathématique car il est impossible d'éliminer totalement les résistances des fils de connexion, et surtout la résistance morte de la bobine.

Ceci étant posé, il est évident que plus nous diminuerons R, plus la puissance consommée sera grande, le courant restant en phase avec la tension.

C) Bande passante.

1° ***a) Limite supérieure.*** – Une pulsation donnant un déphasage de $\frac{\pi}{4}$ en valeur absolue est telle que $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R} = \pm 1$, soit

$$L\omega^2 \pm R\omega - \frac{1}{C} = 0,$$

mais nous connaissons déjà une solution de cette équation :

$$\omega_1 = 30{,}15.10^3 \text{ rd.s}^{-1}.$$

Nous aurons par exemple $\omega_1\omega_2 = \dfrac{1}{LC}$, soit

$$\omega_2 = \frac{1}{LC\omega_1}, \quad \text{avec} \quad C = \frac{1}{\omega_1 (L\omega_1 + R)},$$

d'où

$$\omega_2 = \omega_1 + \frac{R}{L}$$

et, *numériquement,*

$$\omega_2 = 30{,}15.10^3 + \frac{6}{2.10^{-3}} = 33{,}15.10^3 \text{ rd.s}^{-1}.$$

[L'intervalle (ω_1, ω_2) est appelé « bande passante » du circuit.]

b) Résonance. – A la résonance, nous avons $\omega = \omega_0$ tel que

$$L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0,$$

soit

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\omega_1\omega_2}$$

et, *numériquement,*

$$\omega_0 = 10^3 \sqrt{30{,}15 \times 33{,}15} = 31{,}61.10^3 \text{ rd.s}^{-1}.$$

Il y correspond une fréquence

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \sqrt{\frac{\omega_1\omega_2}{4\pi^2}},$$

soit

$$f_0 \approx 10^3 \sqrt{\frac{30{,}15 \times 33{,}15}{40}} \approx 5\,000 \text{ Hz}.$$

2° *Propriétés des limites de la bande passante.*

a) *Intensité.* — Rappelons l'expression générale de l'intensité efficace :

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}.$$

Il est évident que pour $\omega = \omega_1$ ou $\omega = \omega_2$ le résultat sera le même :

$$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = R^2,$$

d'où

$$I = \frac{U}{\sqrt{2R^2}} = \frac{U}{R\sqrt{2}}.$$

A la résonance, nous avons $L\omega = \frac{1}{C\omega}$ et, par conséquent,

$$I_0 = \frac{U}{R},$$

d'où le rapport

$$\frac{I}{I_0} = \frac{U}{R\sqrt{2}} \times \frac{R}{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b) *Puissance* — A la résonance, $\varphi = 0$ donc $\cos \varphi = 1$ et nous avons $P_0 = UI_0$.

Aux limites de la bande passante, nous avons vu que $\varphi = \pm \frac{\pi}{4}$, d'où $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$

et

$$P = UI \cos \varphi = \frac{UI}{\sqrt{2}}.$$

Le rapport $\frac{P}{P_0}$ est par conséquent

$$\frac{P}{P_0} = \frac{UI}{\sqrt{2}\, UI_0} = \frac{1}{2}.$$

(C'est en fait cette propriété qui sert habituellement à définir la bande passante d'un circuit.)

22

1. – *Impédance d'un circuit* (R, C)

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}.$$

2. – Construction de Fresnel pour la tension aux bornes de deux circuits (R, C) identiques en série.

3. – Impédance et facteur de puissance d'un circuit (R, L, C).

4. – *Circuits* (C), (R), et (R'L) *en parallèle :* recherche de l'intensité totale par la construction de Fresnel.

On applique entre les bornes A et B d'un circuit électrique une tension $u = 100\sqrt{2}\sin 100\,\pi t$ (u est exprimé en volts, t en secondes). La construction de Fresnel est indispensable dans chaque cas. Prendre $\frac{1}{\pi} = 0{,}318$ et $\sqrt{2} = 1{,}414$.

1° On monte en série, entre A et B, une résistance non inductive $R_1 = 100\ \Omega$ et un condensateur de capacité C_1. L'intensité efficace du courant est $I_1 = 0{,}707$ A.

a) Calculer la valeur de C_1.

b) Établir l'expression de l'intensité instantanée.

2° On monte en série, entre A et B, la résistance R_1, le condensateur C_1 précédent, une résistance non inductive $R_2 = 200\ \Omega$, et un condensateur de capacité C_2. Soit Z l'impédance totale de la portion de circuit AB, Z' l'impédance de la portion de circuit AD, Z'' l'impédance de la portion de circuit DB (*fig.* 1).

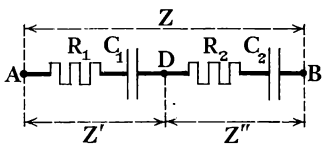


FIG. 1

a) Quelle doit être la valeur de C_2 pour que la relation $Z = Z' + Z''$ soit vérifiée ?

b) Calculer l'intensité efficace I_2 et déterminer l'expression de l'intensité instantanée.

3° On monte en série, entre A et B, une bobine de résistance constante $R_3 = 200\ \Omega$ et d'inductance L variable, un condensateur de capacité $C_3 = 10{,}6\ \mu$F.

a) Pour quelle valeur de L le facteur de puissance du circuit sera-t-il égal à 1 ?

b) Pour quelles valeurs de L le facteur de puissance du circuit sera-t-il égal à 0,707 ?

c) Déterminer pour chaque cas la valeur de l'intensité efficace et l'expression de l'intensité instantanée.

4° On monte en parallèle entre A et B un condensateur de capacité $C_4 = 31{,}8$ μF, une résistance $R_4 = 100$ Ω, une bobine de résistance $R'_4 = 100$ Ω et d'inductance $L_4 = 0{,}318$ H (*fig.* 2).

a) Déterminer les expressions des intensités instantanées i_1, i_2, i_3 des courants qui circulent respectivement dans le condensateur, la résistance et la bobine.

b) Déterminer graphiquement l'intensité principale efficace I et l'expression de l'intensité principale instantanée i, sachant que $i = i_1 + i_2 + i_3$. Échelle : 5 cm pour 1 A.

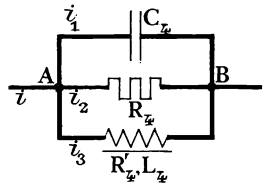


FIG. 2

(Bacc. C et E. Amiens, septembre 1975.)

1°Résistance et condensateur en série.

a) Capacité. — Prenons comme phase de référence celle du courant parcourant le circuit. La tension aux bornes de la résistance a pour valeur efficace $U_R = R_1 I_1$, elle est en phase avec l'intensité.

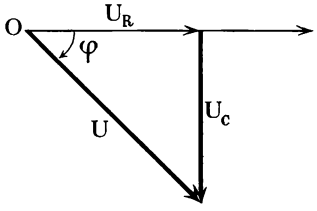


FIG. 1

La tension aux bornes du condensateur a pour valeur efficace $U_C = \dfrac{I_1}{C_1\omega}$, ω étant la pulsation du courant; elle est en retard de phase de $\dfrac{\pi}{2}$ par rapport à l'intensité.

Le diagramme de Fresnel (*fig.* 1) nous montre que

$$U_R^2 + U_C^2 = U^2,$$

U étant la tension efficace appliquée.

Nous avons donc $R_1^2 I_1^2 + \dfrac{I_1^2}{C_1^2\omega^2} = U^2$, soit

$$C_1 = \frac{1}{\omega\sqrt{\dfrac{U^2}{I_1^2} - R^2}}.$$

Numériquement,

$$C_1 = \frac{1}{100\pi\sqrt{\dfrac{100^2}{(0{,}707)^2} - 100^2}} = \frac{1}{10^4\pi} = 3{,}18.10^{-5}\ \text{F},$$

ou $C_1 = 31{,}8$ μF.

b) Intensité instantanée. — La valeur maximale de l'intensité instantanée i, est $I_1\sqrt{2}$. Pour déterminer sa phase par rapport à u, considérons les valeurs respectives de U_R et U_C :

$$U_R = R_1 I_1 = 100 \times 0{,}707 = 70{,}7\ \text{V},$$

$$U_C = \sqrt{U^2 - U_R^2} = \sqrt{100^2 - (70{,}7)^2} = 70{,}7\ \text{V}.$$

La phase φ de u par rapport à i est telle que

$$|\operatorname{tg}\varphi| = \frac{U_C}{U_R} = 1;$$

φ étant négatif : $\varphi = -\frac{\pi}{4}$. Celle de i par rapport à u est donc $-\varphi = +\frac{\pi}{4}$ et

$$i = 0{,}707\sqrt{2}\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right),$$

soit

$$i = \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{(en ampères).}$$

2° Deux résistances et deux condensateurs en série.

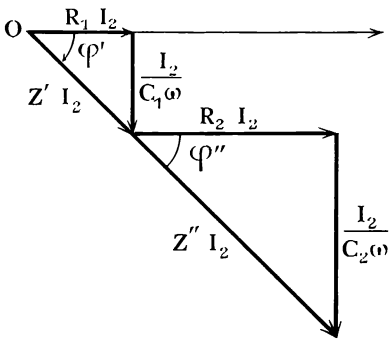


FIG. 2

a) Deuxième capacité. – Multiplions les deux membres de la relation à vérifier par I_2 :

$$U = ZI_2 = Z'I_2 + Z''I_2.$$

Nous voyons sur le diagramme de Fresnel (*fig.* 2) que cette relation sera vérifiée si les vecteurs représentant $U' = Z'I_2$ et $U'' = Z''I_2$ sont colinéaires, ce qui se produira si les déphasages φ' et φ'' de u' et u'' par rapport à i sont égaux. Nous avons calculé φ' (sous la désignation φ) au 1°, nous avons

$$|\varphi'| = \frac{\pi}{4}, \qquad \text{donc} \qquad |\varphi''| = \frac{\pi}{4}$$

et

$$|\operatorname{tg}\varphi''| = \frac{1}{R_2C_2\omega} = 1,$$

d'où

$$C_2 = \frac{1}{R_2\omega}.$$

Numériquement,

$$C_2 = \frac{1}{200 \times 100\pi} = 1{,}59.10^{-5}\ \text{F},$$

soit $C_2 = 15{,}9\ \mu\text{F} = \frac{C_1}{2}$.

b) Intensité. – Puisque R_2 est égal à $2R_1$, nous voyons par similitude que $Z'' = 2Z'$ et, puisque $Z = Z' + Z''$,

$$Z = 3Z'.$$

A la première question, nous avions $U = Z'I_1$; ici nous avons $U = ZI_2$. En faisant le rapport membre à membre ou en identifiant, il vient

$$I_2 = \frac{Z'}{Z} I_1$$

et, *numériquement*,

$$I_2 = \frac{1}{3} \times 0{,}707 = 0{,}236 \text{ A}.$$

La valeur maximale de l'intensité instantanée est donc

$$I_2 \sqrt{2} = 0{,}333 \text{ A}.$$

Sa phase est la même que précédemment, les trois vecteurs représentant U, U' et U'' étant colinéaires. Nous avons donc

$$i_2 = 0{,}333 \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{(en ampères)}.$$

3° Circuit R, L, C.

a) Facteur de puissance égal à 1. — Le facteur de puissance relie la puissance dissipée dans le circuit à la tension efficace appliquée à ses bornes et à l'intensité efficace qui le parcourt dans la relation

$$P = UI \cos \varphi \quad (\textit{fig. } 3).$$

C'est le cosinus du déphasage entre le courant et la tension. Il est égal à 1 quand ce déphasage est nul, c'est-à-dire lorsque les réactances du circuit ont une somme nulle. La pulsation de la tension appliquée est alors égale à la pulsation propre du circuit, il y a résonance. Nous aurons donc

$$L\omega = \frac{1}{C_3\omega}, \quad \text{soit} \quad L = \frac{1}{C_3\omega^2}$$

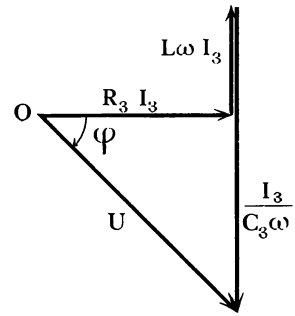


FIG. 3

et, *numériquement*,

$$L = \frac{1}{10{,}6.10^{-6} \times 10^4 \pi^2} = 0{,}956 \text{ H}.$$

b) Facteur de puissance égal à 0,707. — Si $\sqrt{2} = 1{,}414$, $0{,}707 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\varphi = \pm \frac{\pi}{4}$. Nous aurons un facteur de puissance égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$ lorsque la réactance du circuit sera égale en valeur absolue à sa résistance. Sur le diagramme de Fresnel, U est alors matérialisée par l'hypoténuse d'un triangle isocèle rectangle et $\varphi = \pm \frac{\pi}{4}$.

Nous écrirons donc

$$L\omega - \frac{1}{C_3\omega} = \pm R, \qquad \text{soit} \qquad L = \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{C_3\omega} \pm R\right).$$

Numériquement,

$$L = \frac{1}{100\pi}\left(\frac{1}{10{,}6.10^{-6} \times 100\pi} \pm 200\right) = \frac{1}{100\pi}(300 \pm 200),$$

ce qui nous conduit à deux valeurs positives donc acceptables pour L :

$$L_1 = 0{,}318 \text{ H} \qquad \text{et} \qquad L_2 = 1{,}59 \text{ H}.$$

c) Intensité. – Dans le premier cas, les réactances s'annulant, le circuit se comporte globalement comme si la résistance R était seule. Nous aurons donc

$$I_3 = \frac{U}{R},$$

soit

$$I_3 = \frac{100}{200} = 0{,}5 \text{ A}.$$

Le déphasage étant nul, l'intensité instantanée est

$$i_3 = 0{,}707 \sin 100\pi t \qquad \text{(ampères)}.$$

Dans les deux derniers cas, la réactance du circuit est égale à sa résistance morte. Le diagramme de Fresnel (après simplification par I_3) nous montre que $Z = R\sqrt{2}$ pour les deux valeurs de L calculées.

Nous avons donc dans les deux cas

$$I'_3 = I''_3 = \frac{U}{R\sqrt{2}} = \frac{100}{200\sqrt{2}},$$

soit

$$I'_3 = I''_3 = 0{,}353\,5 \text{ A}.$$

Pour la valeur L_1, correspondant à la figure, la capacité l'emporte sur l'inductance, l'intensité est donc en avance sur la tension et

$$i'_3 = 0{,}5 \sin\left(100\,\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{(ampères)}.$$

Pour la valeur L_2, c'est l'inductance qui l'emporte et le courant est en retard sur la tension. Nous avons alors

$$i''_3 = 0{,}5 \sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{(ampères)}.$$

4° Montage en parallèle :

a) Intensité dans chaque branche.

- Condensateur : son impédance est

$$Z_1 = \frac{1}{C_4\omega} = \frac{1}{31{,}8.10^{-6} \times 100\pi} = 100\ \Omega.$$

L'intensité efficace qui le traverse est

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{100}{100} = 1 \text{ A.}$$

Le courant est en avance de phase de $\frac{\pi}{2}$ sur la tension :

$$i_1 = \sqrt{2} \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{(ampères).}$$

• Résistance : son impédance est

$$Z_2 = R = 100\ \Omega, \text{ donc } I_2 = 1 \text{ A}$$

et

$$i_2 = \sqrt{2} \sin 100\pi t \quad \text{(ampères)}$$

le déphasage étant nul.

• Bobine : elle a une réactance

$S_4 = L_4\omega = 0{,}318 \times 100\pi = 100\ \Omega$;

son impédance est

$$Z_3 = \sqrt{R_4'^2 + S_4^2},$$

soit

$$Z_3 = \sqrt{10^4 + 10^4} = 141{,}4\ \Omega.$$

L'intensité efficace est donc

$$I_3 = \frac{U}{Z_3} = \frac{100}{141{,}4} = 0{,}707 \text{ A;}$$

l'intensité a un retard de phase de $\frac{\pi}{4}$ sur la tension (*fig.* 4) et $i_3 = 1 \cdot \sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$.

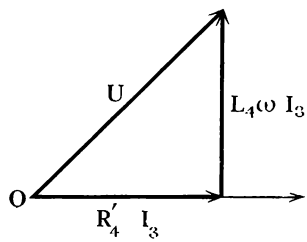


FIG. 4

b) Intensité principale. — Nous sommes amenés ici à tracer un diagramme de Fresnel un peu inhabituel où la phase de référence est celle de la tension (commune aux trois branches). L'intensité totale sera représentée par la somme des vecteurs matérialisant I_1, I_2 et I_3 (*fig.* 5).

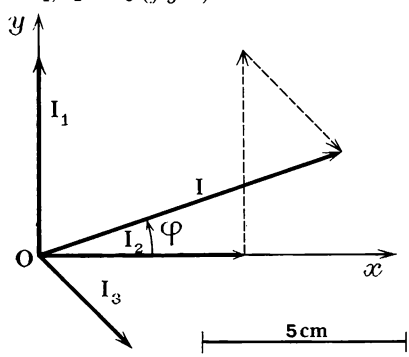


FIG. 5

Rappelons les caractéristiques de chacun de ces vecteurs :

	Norme	Angle polaire
I_1	1 ..	$+\frac{\pi}{2}$
I_2	1	0
I_3	0,707	$-\frac{\pi}{4}$

et construisons leur somme vectorielle.

Les calculs seront facilités par projection sur deux axes, Ox d'angle polaire nul et Oy d'angle polaire $+\frac{\pi}{2}$.

Les projections de I_3 sur Ox et Oy sont respectivement $+ 0{,}5$ et $- 0{,}5$.

Les projections de I seront donc $1 + 0{,}5 = 1{,}5$ et $1 - 0{,}5 = 0{,}5$. L'intensité principale sera donc

$$I = \sqrt{(1{,}5)^2 + (0{,}5)^2} \approx 1{,}581 \text{ A.}$$

Sa phase sera telle que $\operatorname{tg} \varphi = \frac{0{,}5}{1{,}5} = \frac{1}{3}$, soit $\varphi \approx 0{,}322$ rd. L'intensité principale instantanée aura donc pour expression

$$i = 2{,}235 \sin (100\pi t + 0{,}322).$$

23

1. – Impédance d'un circuit (R, L, C).
2. – Intensités en quadrature dans deux circuits en parallèle.
3. – Production d'un champ tournant : *addition géométrique des vecteurs induction magnétique* (cours de 1ère CE).

1° Deux bobines plates identiques, B_1 et B_2, ont chacune une résistance R_0 et une inductance L_0. Pour déterminer la valeur de L_0 et celle de R_0, on effectue les mesures suivantes :

a) la bobine B_1 est alimentée par une tension alternative sinusoïdale

$$u = 100\sqrt{2}\sin 314t \text{ volts.}$$

L'intensité efficace I est 1,62 ampère;

b) la bobine B_2 alimentée par la même tension est montée en série avec une boîte de condensateurs. On règle la valeur de la capacité pour obtenir l'intensité efficace maximale dans la bobine B_2, soit 1,75 ampère.

Déterminer L_0 et R_0.

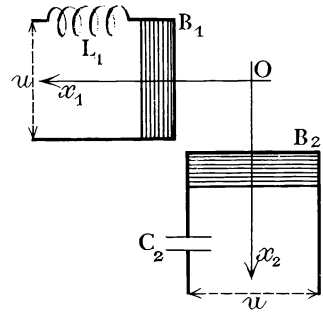
2° On établit deux circuits; le premier est constitué par la bobine B_1 et une inductance pure L_1; le second est constitué par la bobine B_2 et une capacité C_2. Ces deux circuits sont alimentés, chacun, par la même tension alternative en phase $u = 110\sqrt{2}\sin 314t$ volts. On règle la valeur de L_1 et C_2 pour que les intensités efficaces I_1 et I_2 dans chaque circuit soient égales mais que les intensités instantanées i_1 et i_2 soient en quadrature de phase.

a) Montrer que les valeurs absolues des déphasages des deux courants i_1 et i_2 par rapport à la tension u sont égales.

b) Calculer $I_1 = I_2$ ainsi que L_1 et C_2.

3° On reprend les deux circuits de la question précédente et l'on dispose perpendiculairement les axes Ox_1 et Ox_2 des deux bobines B_1 et B_2 comme l'indique le schéma. Le point de concours O de ces axes est équidistant des deux bobines. Dans ces conditions, lorsque l'intensité du courant dans B_1 est maximale, il existe en O un vecteur induction magnétique $\vec{B}_0$ porté par Ox_1 d'intensité

$$B_0 = 10^{-3} \text{ tesla.}$$



Montrer que l'intensité du vecteur résultant $\vec{B}$ en O est indépendante du temps et que ce vecteur tourne autour de O dans le plan (Ox_1, Ox_2).

Quelle est la nature de ce mouvement de rotation ?

N.B. – On rappelle qu'en un point de l'axe d'une bobine plate, le vecteur induction magnétique est porté par l'axe et son module est proportionnel à chaque instant à l'intensité du courant. Le coefficient de proportionnalité est fonction de la distance du point considéré au centre de la bobine.

(Bacc. C et E Nantes, septembre 1974)

1° Caractéristiques d'une bobine.

a) Impédance. – L'impédance Z de la bobine est liée à l'intensité efficace I circulant dans le circuit et à la tension efficace V entre ses bornes par la relation

$$Z = \frac{U}{I}.$$

Nous pouvons extraire U par identification de l'expression de la tension instantanée u, sachant que l'amplitude de celle-ci est $U\sqrt{2}$.

Il vient

$$U = 100\ V \qquad \text{et} \qquad Z = \frac{100}{1{,}62} = 61{,}73\ \Omega.$$

b) Résistance. – L'expression générale de l'impédance du circuit composé de la bobine (L_0, R_0) et d'un condensateur de capacité C_0 est

$$Z = \sqrt{R_0^2 + \left(L_0\omega - \frac{1}{C_0\omega}\right)^2},$$

ω étant la pulsation de la tension appliquée aux bornes du circuit.

Cette impédance est minimale et vaut $Z_0 = R_0$ lorsque C_0 est tel que

$$L_0\omega = \frac{1}{C_0\omega}.$$

Pour cette valeur de C_0, l'intensité efficace est maximale, soit I_0. Nous avons donc alors

$$Z_0 = R_0 = \frac{U}{I_0} = \frac{100}{1{,}75} = 57{,}14\ \Omega.$$

Nous savons, d'autre part, que

$$Z = \sqrt{R_0^2 + L_0^2\omega^2},$$

nous pouvons déterminer ω d'après l'expression de u :

$$\omega = 314\ \text{rd.s}^{-1}$$

et

$$L = \frac{\sqrt{Z^2 - R_0^2}}{\omega} = \frac{\sqrt{(61{,}73)^2 - (57{,}14)^2}}{314} = 7{,}44.10^{-2}\ \text{H}.$$

2° Circuits en quadrature.

a) Déphasages. – Le premier circuit a pour impédance

$$Z_1 = \sqrt{R_0^2 + (L_0\omega + L_1\omega)^2}.$$

Le déphasage du courant i_1 est donné par

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = - \frac{L_0\omega + L_1\omega}{R_0}.$$

Le second circuit a pour impédance

$$Z_2 = \sqrt{R_0^2 + \left(L_0\omega - \frac{1}{C_2\omega}\right)^2}.$$

Le déphasage du courant i_2 est donné par

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\frac{1}{C_2\omega} - L_0\omega}{R_0}.$$

La tension efficace d'alimentation étant la même pour les deux circuits, les intensités efficaces seront égales si les impédances sont les mêmes

Si nous identifions Z_1 et Z_2, il vient

$$(L_0\omega + L_1\omega)^2 = \left(L_0\omega - \frac{1}{C_2\omega}\right)^2.$$

Cette équation a deux solutions, les quantités entre parenthèses pouvant être égales ou opposées.

— Si elles sont égales, l'équation devient

$$L_1\omega = - \frac{1}{C_2\omega},$$

ce qui est impossible, L_1 et C_2 étant essentiellement positifs.

— Si elles sont opposées, nous avons

$$L_0\omega + L_1\omega = \frac{1}{C_2\omega} - L_0\omega.$$

Les deux membres de cette équation sont, au signe près, les numérateurs de $\operatorname{tg} \varphi_1$ et $\operatorname{tg} \varphi_2$. Nous avons donc

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = - \operatorname{tg} \varphi_2,$$

ce qui, sachant que φ_1 et φ_2 sont compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, est équivalent à $\varphi_1 = -\varphi_2$.

b) Valeurs des paramètres. — φ_1 est obligatoirement un retard de phase (circuit inductif). φ_2 sera donc une avance de phase de même module. Leur différence étant égale à $\frac{\pi}{2}$, nous avons

$$\varphi_1 = -\frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \varphi_2 = +\frac{\pi}{4},$$

soit

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -1 \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = 1.$$

Nous en tirons respectivement

$$L_0\omega + L_1\omega = R_0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{C_2\omega} - L_0\omega = R_0,$$

d'où

$$Z_1 = Z_2 = \sqrt{R_0^2 + R_0^2} = R_0\sqrt{2}$$

et

$$I_1 = I_2 = \frac{U}{R_0\sqrt{2}},$$

soit, *numériquement*,

$$I_1 = I_2 = \frac{110}{57{,}14\sqrt{2}} = 1{,}361 \text{ A}.$$

Si nous reprenons les expressions précédentes, nous en tirons

$$L_1 = \frac{R_0}{\omega} - L_0 = \frac{57{,}14}{314} - 7{,}435.10^{-2} = 1{,}076.10^{-1} \text{ H}$$

et de même

$$C_2 = \frac{1}{\omega(R_0 + L_0\omega)} = \frac{1}{314\,(57{,}14 + 7{,}435.10^{-2} \times 314)}$$
$$= 3{,}957.10^{-5} \text{ F}, \quad \text{ou} \quad 39{,}57 \text{ microfarads}.$$

3° Champ magnétique tournant. – Gardons la même origine des temps que précédemment. Les intensités instantanées dans les deux bobines ont respectivement pour expressions

$$i_1 = I_1\sqrt{2}\sin\left(314t - \frac{\pi}{4}\right)$$

et

$$i_2 = I_2\sqrt{2}\sin\left(314t + \frac{\pi}{4}\right),$$

avec

$$I_1 = I_2.$$

Chaque bobine crée en O un champ magnétique, soit respectivement

$$B_1 = kI_1\sqrt{2}\sin\left(314t - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{suivant } Ox_1$$

et

$$B_2 = kI_2\sqrt{2}\sin\left(314t + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{suivant } Ox_2.$$

i_1 est maximale pour $314t = -\frac{\pi}{4} + k\pi$; i_2 est alors nulle. Dans ce cas, B_1 vaut donc $kI_1\sqrt{2}$ et B_2 est nul. B est donc bien dirigé suivant Ox_1 et nous avons

$$B_0 = kI_1\sqrt{2} = kI_2\sqrt{2}.$$

Nous pouvons donc écrire les expressions de B_1 et B_2 sous la forme

$$B_1 = B_0 \sin\left(314t - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$B_2 = B_0 \sin\left(314t + \frac{\pi}{4}\right) = B_0 \cos\left(314t - \frac{\pi}{4}\right).$$

B_1 et B_2 sont les projections d'un vecteur tournant de module B_0 et d'angle polaire

$$\alpha = 314t - \frac{\pi}{4}, \text{ avec } \alpha = (\overrightarrow{Ox_2}, \vec{B});$$

α étant fonction linéaire de t, il s'agit d'une rotation uniforme de vitesse angulaire.

$$\omega = 314 \text{ rd.s}^{-1}.$$

REMARQUE. — Le sens de rotation dépend des sens d'enroulement de B_1 et B_2 et ne peut donc être précisé ici.

D. – Actions des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sur les particules

24

1. – *Principe de l'oscilloscope électronique.*
2. – Action d'un champ électrique sur une particule.
3. – Principes fondamentaux de la dynamique.
4. – Impédance d'un circuit (R, L, et R, L, C).
5. – Puissance moyenne.
6. – Diagramme de Fresnel.

Question préliminaire. – On dispose d'un oscilloscope électronique dont les plaques de déviation verticale sont les armatures d'un condensateur plan distantes de $a = 4$ cm et de longueur $l = 8$ cm considérées parallèlement à la direction initiale du faisceau d'électrons.

Au moment où les électrons pénètrent entre les plaques, le faisceau est homocinétique de vitesse v_0. On observe le spot sur un écran fluorescent situé à la distance D = 36 cm du centre des plaques. On désigne par z le déplacement du spot sur l'écran, provoqué par l'action du condensateur.

On donne pour l'électron : masse $m = 9.10^{-31}$ kg, charge $e = -1{,}6.10^{-19}$ C.

a) Établir la relation donnant le déplacement z du spot sur l'écran en fonction de la tension U appliquée aux plaques.

b) La sensibilité de l'appareil est caractérisée par la tension qui provoque un déplacement du spot de 1 mm sur l'écran. Calculer la vitesse v_0 sachant que la sensibilité est 4 V/mm.

N.B. – La vitesse des électrons est assez faible vis-à-vis de celle de la lumière pour que la masse m soit invariable.

Problème. – A) On se propose d'étudier d'abord une bobine de résistance R = 12 Ω et d'inductance L = 0,10 H. Elle doit être traversée par le courant industriel de fréquence 50 Hz et l'intensité efficace doit être limitée à 1,5 A.

1° A quelle valeur efficace doit-on régler le générateur de tension variable placé entre ses bornes ?

2° Ce générateur ayant subi une détérioration on ne dispose plus que de la tension du secteur de valeur efficace 120 V non réglable. On peut réaliser les montages suivants :

a) disposer une résistance variable R′ en série avec la bobine ;

b) disposer une boîte de condensateurs variables de capacité C toujours en série avec la bobine.

A quelles valeurs doit-on fixer R′ dans le montage (*a*) et C dans le montage (*b*) pour que l'intensité soit 1,5 A ?

Comparer les puissances consommées. Quel est le montage préférable ?

B) Dans le montage (*a*), R′ et bobine en série, on mesure à l'aide d'un voltmètre les tensions U aux bornes du secteur, U_1 aux bornes de la résistance R′, U_2 aux bornes de la bobine.

Déterminer les valeurs de ces trois grandeurs. On prend comme référence la tension du secteur; calculer les phases initiales φ_1 de la tension aux bornes de R'; φ_2 de la tension aux bornes de la bobine.

Donner les expressions des tensions instantanées u, u_1, u_2.

C) On veut vérifier les résultats de la question B) avec l'oscilloscope décrit dans la question préliminaire.

1° On applique aux plaques de déviation verticale successivement les tensions u_1, u_2 et u définies ci-dessus.

Expliquer pourquoi on observe un trait vertical sur l'écran. La sensibilité étant 4 V/mm, calculer dans chacun des trois cas la longueur du trait obtenu.

2° L'oscilloscope est en réalité bi-faisceau et l'on fait fonctionner son balayage (c'est-à-dire qu'il permet alors d'enregistrer en même temps deux tensions variables en fonction du temps).

Représenter, en précisant l'échelle utilisée, l'allure des courbes tracées sur l'écran quand on enregistre simultanément

***a*) $u(t)$ et $u_1(t)$;**

***b*) $u(t)$ et $u_2(t)$.**

N.B. – La précision de la règle à calcul est suffisante. On prendra $\pi^2 = 10$.

(Bacc. C et E. Montpellier, juin 1973)

QUESTION PRÉLIMINAIRE. – ***a*) Relation donnant le déplacement du spot en fonction de la tension U.**

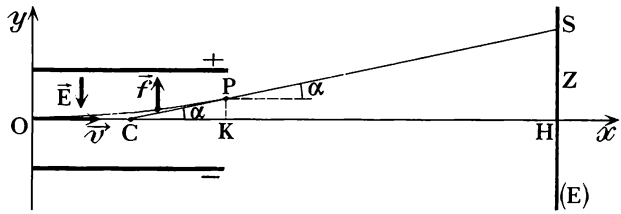


FIG. 1

Rapportons le mouvement des électrons aux axes Ox, de mêmes direction et sens que la vitesse $\vec{v}$, Oy, normal aux plaques, de sens opposé à celui du champ électrique $\vec{E}$ qui existe entre les plaques, Oz, tel que le trièdre trirectangle $Oxyz$ soit direct.

A l'instant $t = 0$, un électron pénètre dans le champ à l'origine O, avec la vitesse $\vec{v}$.

L'électron subit l'action de la force électrique $\vec{f} = e\vec{E}$ qui lui communique l'accélération $\vec{\gamma} = \dfrac{e\vec{E}}{m}$ aussi longtemps qu'il reste dans la région OK où existe le champ.

Les projections de l'accélération sur les axes sont

$$x'' = 0; \qquad y'' = \frac{|e|\,E}{m}; \qquad z'' = 0,$$

si l'on désigne par $E = \dfrac{U}{a}$ le module du champ électrique.

Compte tenu des conditions initiales, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ et $x'_0 = v$, $y'_0 = z'_0 = 0$, les projections de la vitesse à l'instant t sont

$$x' = v; \qquad y' = \frac{|e|\,E}{m}\,t; \qquad z' = 0;$$

et les coordonnées de l'électron à cet instant sont

$$x = vt; \qquad y = \frac{|e|\,E}{2m}\,t^2; \qquad z = 0.$$

L'électron décrit donc, dans le plan xOy, une trajectoire parabolique d'axe Oy, d'équation

$$y = \frac{|e|\,E}{2mv^2}\,x^2 = \frac{|e|\,U}{2mav^2}\,x^2.$$

Nous admettrons que le champ $\vec{E}$ s'annule brusquement à l'abscisse $x_K = l = 8$ cm. Pour $x > l$, l'électron poursuit un mouvement rectiligne uniforme jusqu'à son impact S avec l'écran (E).

Au sortir du champ, la trajectoire forme avec l'axe Ox l'angle α tel que

$$\operatorname{tg}\alpha = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=l} = \frac{|e|\,Ul}{mav^2}$$

et son ordonnée est

$$KP = \frac{|e|\,Ul^2}{2mav^2}.$$

La trajectoire rectiligne ultérieure PS rencontre donc l'axe Ox au point C tel que

$$\frac{KP}{CK} = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \text{soit} \qquad CK = \frac{KP}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{l}{2}.$$

La déviation HS = Z du spot est donc définie par la relation

$$\frac{HS}{CH} = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \text{soit} \qquad Z = CH \operatorname{tg}\alpha.$$

Nous connaissons CH = D = 36 cm. Le déplacement du spot est donné par la relation

$$Z = \frac{|e|\,lD}{mav^2}\,U.$$

***b)* Calcul de la vitesse *v*.** — Pour U = 4 V, nous avons Z = 1 mm = 10^{-3} m. Avec $|e| = 1{,}6.10^{-19}$ C, $l = 8.10^{-2}$ m, D = 0,36 m, $m = 9.10^{-31}$ kg, $a = 4.10^{-2}$ m, nous avons

$$v = \sqrt{\frac{|e|\,lDU}{Zma}} = \sqrt{\frac{1{,}6.10^{-19} \times 8.10^{-2} \times 0{,}36 \times 4}{10^{-3} \times 9.10^{-31} \times 4.10^{-2}}} = 2{,}26.10^{7}\ \text{m.s}^{-1},$$

soit

$$v = 22\,600\ \text{km.s}^{-1}.$$

PROBLÈME

A) 1° Valeur efficace à donner à la tension. – Pour un courant de fréquence $f = 50$ Hz, de pulsation $\omega = 100\pi$ rd.s^{-1}, l'impédance de la bobine est

$$Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} = \sqrt{144 + 100\pi^2} = 33{,}6\ \Omega.$$

D'après la loi d'Ohm, la tension nécessaire pour obtenir l'intensité efficace I est de valeur efficace

$$U = ZI = 33{,}6 \times 1{,}5 = 50{,}4\ \text{V}.$$

La tension variable est au plus égale à 50,4 V.

2° *a*) Résistance R′ à placer en série avec la bobine. – La tension efficace disponible est $U_1 = 120$ V et l'intensité efficace doit être au plus égale à 1,5 A. L'impédance du circuit doit donc être au moins égale à

$$Z_1 = \frac{U_1}{I} = \frac{120}{1{,}5} = 80\ \Omega.$$

L'impédance du circuit, de résistance R′ + R et d'inductance L, est

$$\sqrt{(R' + R)^2 + L^2\omega^2}.$$

La résistance variable R′ est donc définie par l'inégalité

$$\sqrt{(R' + R)^2 + L^2\omega^2} \geqslant Z_1,$$

soit

$$R' \geqslant \sqrt{Z_1^2 - L^2\omega^2} - R.$$

Numériquement, il vient

$$R' \geqslant \sqrt{6\,400 - 100\pi^2} - 12 = 61{,}6\ \Omega.$$

La résistance variable doit être au moins égale à 61,6 Ω.
Si I = 1,5 A, R′ = 61,6 Ω.

***b*) Capacité C à monter en série avec la bobine.** – L'impédance du circuit doit toujours être au moins égale à Z_1. Avec la capacité C, l'expression de l'impédance est

$$\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}.$$

et la capacité C est définie par l'inégalité

$$\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \geqslant Z_1,$$

soit

$$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 \geqslant Z_1^2 - R^2.$$

La réactance, $L\omega - \frac{1}{C\omega}$, doit donc être extérieure à l'intervalle

$$]- \sqrt{Z_1^2 - R^2}, + \sqrt{Z_1^2 - R^2}[.$$

Nous avons deux solutions possibles :

α) $$L\omega - \frac{1}{C\omega} \geqslant + \sqrt{Z_1^2 - R^2},$$

soit

$$\frac{1}{C\omega} \leqslant L\omega - \sqrt{Z_1^2 - R^2},$$

β) $$L\omega - \frac{1}{C\omega} \leqslant - \sqrt{Z_1^2 - R^2},$$

soit

$$\frac{1}{C\omega} \geqslant L\omega + \sqrt{Z_1^2 - R^2}.$$

Numériquement, nous avons $L\omega = 10\pi$, et

$$\sqrt{Z_1^2 - R^2} = \sqrt{6\,400 - 144} = 79{,}1\ \Omega.$$

La solution α est donc impossible, car $\frac{1}{C\omega}$, nombre positif, ne peut pas être inférieur à $L\omega - \sqrt{Z_1^2 - R^2} < 0$.

La solution β conduit à l'inégalité

$$C \leqslant \frac{1}{\omega(L\omega + \sqrt{Z_1^2 - R^2})},$$

soit

$$C \leqslant \frac{1}{100\pi(10\pi + 79{,}1)} = 2{,}88.10^{-5}\ \text{F}.$$

La capacité C doit être inférieure à 28,8 μF. Si $I = 1{,}5$ A, $C = 28{,}8$ μF.

Puissance consommée dans le montage *a*, avec I = 1,5 A. — La puissance est entièrement consommée par effet Joule. Son expression est donc

$$P_a = (R' + R)I^2 = (61{,}6 + 12) \times (1{,}5)^2 = 166\ \text{W}.$$

Puissance consommée dans le montage *b*. — Son expression est

$$P_b = RI^2 = 12 \times 2{,}25 = 27\ \text{W}.$$

Le montage *b* est donc préférable au montage *a*.

B) Tensions efficaces dans le montage *a*. — Les deux appareils sont montés en série et parcourus par le même courant d'intensité efficace

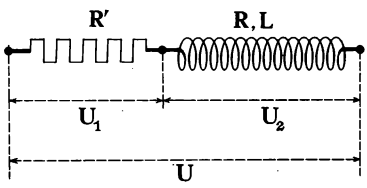


FIG. 2

$$I = 1{,}5 \text{ A.}$$

L'impédance de la résistance R' est

$$Z' = R' = \widehat{39{,}1}\ \Omega.$$

D'après la loi d'Ohm, nous avons donc

$$U_1 = Z'I = R'I = 61{,}6 \times 1{,}5 = 92{,}4 \text{ V.}$$

Nous avons vu, à la question A) 1°, que la tension efficace aux bornes de la bobine, parcourue par un courant I = 1,5 A, est $U_2 = 50{,}4$ V.

Enfin, la tension efficace du secteur, établie aux bornes de l'ensemble, est U = 120 V.

Construisons le diagramme de Fresnel en valeurs efficaces et adoptons l'échelle de 1 millimètre par volt. Les tensions u_1, u_2 et u sont respectivement représentées par les vecteurs $\overrightarrow{OU_1}$, $\overrightarrow{OU_2}$ et $\overrightarrow{OU}$, de modules

$$OU_1 = 92{,}4 \text{ mm}, \quad OU_2 = 50{,}4 \text{ mm}, \quad OU = 120 \text{ mm.}$$

La relation entre valeurs instantanées, $u = u_1 + u_2$, se traduit par la somme vectorielle $\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OU_1} + \overrightarrow{OU_2}$.

Nous savons, de plus, que la bobine et le circuit total sont inductifs. La tension u_1 aux bornes de la résistance pure R' est en phase avec l'intensité, donc les tensions u_2 et u, en avance par rapport à l'intensité, sont en avance de phase par rapport à u_1.

Nous sommes conduits au diagramme de la figure 3, dont la construction est évidente.

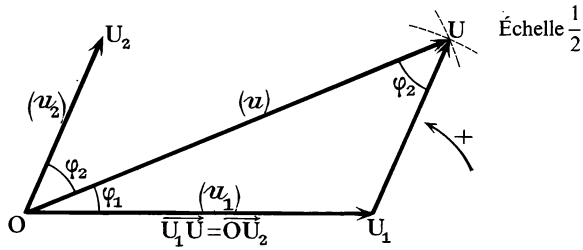


FIG. 3

Par rapport à la tension u, la tension u_1 est en *retard* d'un angle φ_1 tel que

$$\cos \varphi_1 = \frac{OU_1^2 + OU^2 - OU_2^2}{2OU_1 \times OU},$$

soit

$$\cos \varphi_1 = \frac{(92{,}4)^2 + (120)^2 - (50{,}4)^2}{2 \times 92{,}4 \times 120} = 0{,}919\,8,$$

donc $\varphi_1 = 23°6'$, ou 0,403 rd.

Par rapport à la tension u, la tension u_2 est en *avance* d'un angle φ_2 tel que

$$\cos \varphi_2 = \frac{OU_2^2 + OU^2 - OU_1^2}{2OU_2 \times OU},$$

soit

$$\cos \varphi_2 = \frac{(50{,}4)^2 + (120)^2 - (92{,}4)^2}{2 \times 50{,}4 \times 120} = 0{,}694\,6,$$

donc $\varphi_2 = 46°$, ou 0,803 rd.

Les tensions maximales sont respectivement

$$U_{1max} = 92{,}4\sqrt{2} = 130{,}7 \text{ V},$$
$$U_{2max} = 50{,}4\sqrt{2} = 71{,}3 \text{ V},$$
$$U_{max} = 120\sqrt{2} = 169{,}7 \text{ V}.$$

Si l'on choisit l'origine du temps telle que

$$u = U_{max} \sin 314t = 169{,}7 \sin 314t \text{ volts},$$

il vient

$$u_1 = U_{1max} \sin (314t - \varphi_1) = 130{,}7 \sin (314t - 0{,}403)$$

et

$$u_2 = U_{2max} \sin (314t + \varphi_2) = 71{,}3 \sin (314t + 0{,}803).$$

C) 1° Traits verticaux observés sur l'écran. — La tension u_1 oscille 50 fois par seconde entre les valeurs extrêmes $+ U_{1max}$ et $- U_{1max}$. La sensibilité étant 1 mm pour 4 V, le spot oscille entre les positions extrêmes

$$+\frac{U_{1max}}{4} \quad \text{et} \quad -\frac{U_{1max}}{4} \text{ (millimètres)}.$$

La persistance des impressions lumineuses sur la rétine conduit à observer un trait vertical A_1B_1 de hauteur

$$A_1B_1 = 2\frac{U_{1max}}{4} = \frac{U_{1max}}{2} = \frac{130{,}7}{2} = 65{,}4 \text{ mm}.$$

De même, avec la tension u_2 nous observons un trait vertical A_2B_2 de hauteur

$$A_2B_2 = \frac{U_{2max}}{2} = \frac{71{,}3}{2} = 35{,}6 \text{ mm},$$

et, avec la tension u, un trait vertical AB de hauteur

$$AB = \frac{U_{max}}{2} = \frac{169{,}7}{2} = 84{,}8 \text{ mm}.$$

2° Oscillographe fonctionnant en bicourbe avec balayage. – La période de chacune des tensions est $\frac{1}{50}$ s, soit 0,02 s. Nous admettrons que pour chaque tension une seule période apparaît sur l'écran.

La tension $u = 169{,}7 \sin 100\pi t$ varie conformément au tableau suivant :

t	0	0,005	0,01	0,015	0,020	(s)
$100\pi t$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	(rd)
u	0 ↗	169,7 ↘	0 ↘	– 169,7 ↗	0	(V)

La tension $u_1 = 130{,}7 \sin (100\pi t - 0{,}403)$ s'annule aux instants t tels que $100\pi t - 0{,}403 = k\pi$, soit

$$t = \frac{k}{100} + \frac{0{,}403}{100\,\pi} = \frac{k}{100} + 1{,}28.10^{-3}.$$

Nous avons donc le tableau de variations suivant :

t	0	1,28	6,28	(10^{-3} s)
$100\pi t - 0{,}403$	– 0,403	0	$\frac{\pi}{2}$	(rd)
u_1	– 51,2	0	130,7	(V)
t	11,28	16,28	20	(10^{-3} s)
$100\pi t - 0{,}403$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi - 0{,}403$	(rd)
u_1	0	– 130,7	– 51,2	(V)

La tension $u_2 = 71{,}3 \sin (100\pi t + 0{,}803)$ s'annule aux instants t tels que $100\pi t + 0{,}803 = k\pi$, soit

$$t = \frac{k}{100} - \frac{0{,}803}{100\,\pi} = \frac{k}{100} - 2{,}56.10^{-3}.$$

Son tableau de variation est le suivant :

t	0	2,44	7,44	(10^{-3} s)
$100\pi t + 0{,}803$	0,803	$\frac{\pi}{2}$	π	(rd)
u_2	+ 51,2	71,3	0	(V)
t	12,44	17,44	20	(10^{-3} s)
$100\pi t + 0{,}803$	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$2\pi + 0{,}803$	(rd)
u_2	− 71,3	0	+ 51,2	(V)

Pour les tensions, l'échelle est 0,25 mm par V, d'après la question C) 1°.

Supposons le balayage réglé de manière que la durée d'une période (2.10^{-2} s) corresponde à un déplacement horizontal de 100 mm. Nous obtenons les tracés des figures 4 et 5.

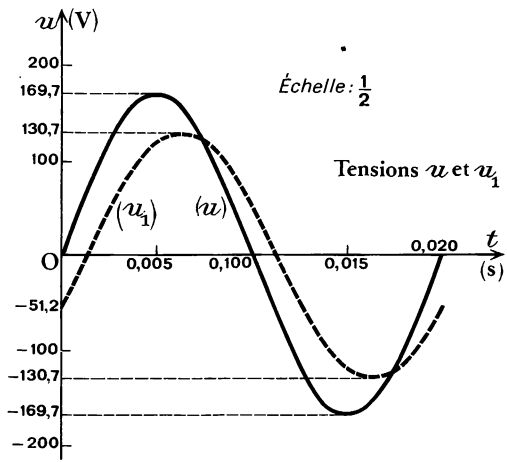


FIG. 4

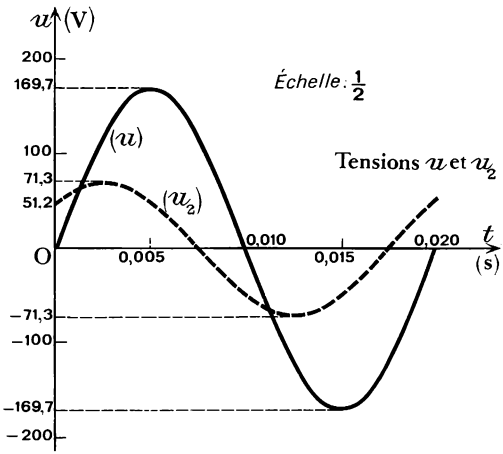

u (V)
200
169,7
100
71,3
51,2
−71,3
−100
−169,7
−200
O
0,005
0,010
0,015
0,020
t
(s)
(u)
(u2)
Échelle : 1/2
Tensions u et u2

FIG. 5

25

1. – Champ et potentiel électriques.
2. – Principes fondamentaux de la dynamique.
3. – Théorème de l'énergie cinétique.
4. – *Travail du champ* $W = q(V_1 - V_2)$.
5. – *Loi de Laplace pour une particule :*

$$F = qvB,$$

de direction et sens donnés par la règle des trois doigts.

6. – *Notion d'isotopes* ${}_1^1H^+$; ${}_1^2H^+$; ${}_1^3H^+$.
7. – Cinématique du mouvement curviligne.

A) Une plaque métallique verticale P_0 est percée d'un petit trou A. Grâce à un dispositif approprié, on ionise positivement des atomes d'hydrogène au point A. Une plaque métallique P parallèle à P_0, percée d'un petit trou S, est disposée de telle sorte que la droite AS soit horizontale (*fig.* 1). Afin d'accélérer les protons produits en A, on établit entre P_0 et P une différence de potentiel positive $U_0 = V_{P0} - V_P$. On suppose qu'il y a, entre P_0 et P, un vide très poussé.

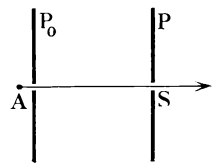


FIG. 1

a) Calculer l'énergie cinétique E_{C_0} et la vitesse v_0 des protons qui passent en S (en fonction de leur masse *m* supposée constante, de leur charge *q* et de U_0) sachant qu'ils sont créés sans vitesse initiale.

b) Calculer la durée *t* du trajet AS.

Application numérique :

$$m = 1{,}67.10^{-27}\ \text{kg}; \quad q = 1{,}6.10^{-19}\ \text{C}; \quad U_0 = 80\,000\ \text{V}; \quad AS = 5\ \text{cm}.$$

B) Ensuite, le pinceau de protons issu de S traverse successivement deux grilles métalliques M et N, planes et parallèles, de longueur très grande par rapport à la distance *d* qui les sépare.

On appelle O le point où le faisceau aborde M en faisant un angle i_0 avec la normale O*y* au plan de cette grille et l'on appelle $U = V_M - V_N$ la différence de potentiel positive, constante, établie entre M et N.

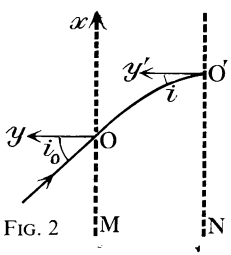


FIG. 2

a) Dans le système d'axes O*x* et O*y* du schéma, trouver en fonction de U, U_0, *d* et i_0, l'équation de la trajectoire des protons dans l'espace séparant les deux grilles.

b) On appelle O′ le point d'impact du faisceau sur la grille N et *i* l'angle de la trajectoire et de la normale à cette grille (*fig.* 2).

Calculer la variation d'énergie cinétique ΔE_C des particules entre O et O′.

En déduire le module v de leur vitesse en O'.

Application numérique : $U = U_0$.

c) Établir que sin $i_0 = k$ sin i, relation où k est un facteur dépendant de U et de U_0.

Calculer k pour $U = U_0$.

C) On enlève les grilles M et N et l'on établit au-delà de P un champ magnétique uniforme. Le vecteur induction magnétique $\vec{B}$ est perpendiculaire au plan de figure et orienté de l'avant vers l'arrière de ce plan (*fig.* 3).

a) On rappelle que la force électromagnétique $\vec{F}$ a pour expression $\vec{F} = q\vec{v}_0 \wedge \vec{B}$. Montrer que le mouvement des particules issues de S est circulaire et uniforme.

Calculer le rayon R de leur trajectoire en fonction de B, U_0, m et q.

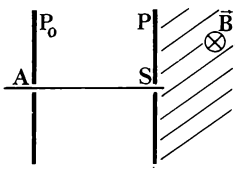


FIG. 3

Application numérique :

$$B = 0{,}8 \text{ T}.$$

b) En déduire la position du point d'impact D des protons sur la plaque P.

Calculer la durée t' du trajet SD.

c) En fait, on observe un deuxième point d'impact D' où arrivent en petit nombre des particules qui ne sont pas des protons.

Quelle est leur nature ?

En déduire la position du point D'.

(Bacc. C et E. Rouen. juin 1975)

A) a) Énergie cinétique et vitesse des protons qui passent en S. — Le champ électrique entre les deux plaques est horizontal, de sens et de direction identiques à ceux du vecteur $\overrightarrow{AS}$, de module

$$E = \frac{V_{P_0} - V_P}{AS} = \frac{U_0}{AS} = \frac{80\,000}{5.10^{-2}} = 1{,}6.10^6 \text{ V.m}^{-1}.$$

Chaque proton subit l'action d'une force électrique $q\vec{E}$, de module

$$qE = 1{,}6.10^{-19} \times 1{,}6.10^6 = 2{,}56.10^{-13} \text{ N},$$

et l'action de son poids, vertical descendant, donc normal à AS, de module

$$mg = 1{,}67.10^{-27} \times 9{,}81 = 1{,}64.10^{-26} \text{ N}.$$

Nous voyons que le poids est négligeable devant la force électrique $q\vec{E}$, que nous supposerons agir seule.

Au cours du déplacement, la force électrique produit le travail

$$W = qE \times AS = q(V_{P_0} - V_P).$$

L'énergie cinétique, initialement nulle, varie de

$$\Delta E_C = E_{C0} - 0 = q(V_{P_0} - V_P).$$

Sa valeur finale est

$$E_{C0} = q(V_{P_0} - V_P) = 1{,}6.10^{-19} \times 80\,000 = 1{,}28.10^{-14} \text{ J}.$$

La vitesse finale du proton est v_0 telle que $E_{C0} = \frac{1}{2}mv_0^2$, soit

$$v_0 = \sqrt{\frac{2E_{C0}}{m}} = \sqrt{\frac{2q(V_{P_0} - V_P)}{m}},$$

c'est-à-dire

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}6.10^{-19} \times 80\,000}{1{,}67.10^{-27}}} = 3{,}915.10^6 \text{ m.s}^{-1}.$$

b) **Durée du trajet AS.** — La force constante qE produit l'accélération constante $\gamma = \dfrac{qE}{m} = \dfrac{qU_0}{m \,.\, AS}$. La vitesse initiale étant nulle, la vitesse à l'instant t est $v = \gamma t$. La durée du trajet est donc

$$t = \frac{v_0}{\gamma} = \sqrt{\frac{2qU_0}{m}} \times \frac{m \,.\, AS}{qU_0} = AS \,.\, \sqrt{\frac{2m}{q \,.\, U_0}},$$

soit

$$t = 5.10^{-2} \sqrt{\frac{2 \times 1{,}67.10^{-27}}{1{,}6.10^{-19} \times 80\,000}} = 2{,}55.10^{-8} \text{ s}.$$

N.B. — Pendant cette durée, le proton est tombé verticalement d'une hauteur

$$h = \frac{1}{2} gt^2 = \frac{1}{2} \times 9{,}81 \times (2{,}55.10^{-8})^2 = 3{,}2.10^{-15} \text{ m}$$

totalement négligeable. On peut admettre que sa trajectoire se confond avec la droite AS.

B) *a*) **Équation de la trajectoire du proton entre les deux grilles.** — Le champ électrique entre les grilles est le vecteur constant $\vec{E}$, normal aux grilles, de module

$$E = \frac{V_M - V_N}{d},$$

dont les projections sur les axes sont

$$E_X = 0;$$

$$E_Y = -\frac{V_M - V_N}{d} = -\frac{U}{d}.$$

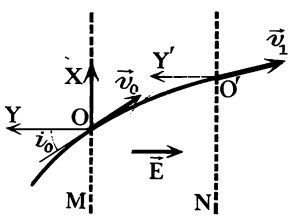


FIG. 1

Les projections de l'accélération sont

$$\gamma_x = \frac{E_X}{m} = 0; \qquad \gamma_y = \frac{E_Y}{m} = -\frac{U}{md}.$$

Les projections du vecteur vitesse à l'instant t sont

$$v_x = a; \qquad v_y = -\frac{Ut}{md} + b.$$

Nous obtenons les valeurs des constantes a et b en écrivant qu'à l'instant $t = 0$ du passage en O, les projections de $\vec{v}_0$ étaient

$$v_{x0} = a = v_0 \sin i_0; \qquad v_{y0} = b = -v_0 \cos i_0,$$

donc, à l'instant t,

$$v_x = v_0 \sin i_0; \qquad v_y = -\frac{Ut}{md} - v_0 \cos i_0.$$

Compte tenu des conditions initiales ($x_0 = y_0 = 0$) les projections du proton à l'instant t s'écrivent

$$x = v_0 t \sin i_0; \qquad y = -\frac{Ut^2}{2md} - v_0 t \cos i_0.$$

En éliminant t entre ces expressions, nous obtenons l'équation cartésienne de la trajectoire :

$$y = -\frac{Ux^2}{2mdv_0^2 \sin^2 i_0} - x \operatorname{cotg} i_0.$$

***b)* Variation d'énergie cinétique entre O et O'.** – La variation d'énergie cinétique ΔE_C est égale au travail de la force électrique pendant le trajet OO', donc

$$\Delta E_C = q(U_M - U_N) = qU.$$

Mais $\Delta E_C = \frac{1}{2} m(v^2 - v_0^2)$. Nous avons donc

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2qU}{m}} = \sqrt{\frac{2qU_0}{m} + \frac{2qU}{m}} = \sqrt{\frac{2q(U_0 + U)}{m}}.$$

Avec $U = U_0 = 80\,000$ V, il vient

$$v = \sqrt{\frac{4 \times 1{,}6.10^{-19} \times 80\,000}{1{,}67.10^{-27}}} = 5{,}537.10^6 \text{ m.s}^{-1}.$$

***c)* Relation entre i et i_0.** – La projection du vecteur vitesse sur l'axe OX est constante : $v_x = v_0 \sin i_0$. Or, la projection du vecteur $\vec{v}$ sur O'X parallèle à OX est

$$v_x = v \cos \varphi,$$

avec (*fig.* 2)

$$\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} - i = \frac{\pi}{2} - i.$$

Nous avons donc

$$v_x = v \cos\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = v \sin i.$$

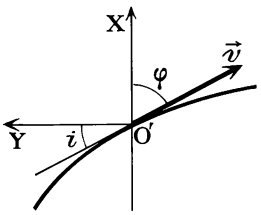


FIG. 2

Nous obtenons une relation analogue à celle du dioptre plan :

$$v_0 \sin i_0 = v \sin i,$$

soit

$$\sin i_0 = \frac{v}{v_0} \sin i = k \sin i.$$

Mais $v = \sqrt{\dfrac{2q(U_0 + U)}{m}}$ et $v_0 = \sqrt{\dfrac{2qU_0}{m}}$. Nous obtenons donc

$$k = \frac{v}{v_0} = \sqrt{\frac{U_0 + U}{U_0}}.$$

Pour $U = U_0$, il vient $k = \sqrt{2} = 1{,}414$.

C) *a)* Nature du mouvement dans le champ magnétique. — La force électromagnétique $\vec{F}$ est perpendiculaire au vecteur vitesse $\vec{v}$ et au vecteur induction $\vec{B}$. Pour une particule positive, son sens est donné par la règle des trois doigts de la main gauche : (pouce : champ; index : courant, ici vecteur $q\vec{v}$; majeur replié : force). La force $\vec{F}$ est donc normale à la trajectoire, de module qvB. La particule possède donc une accélération tangentielle nulle

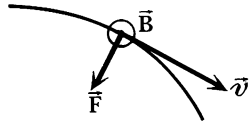


FIG. 3

$$\gamma_T = \frac{dv}{dt} = 0, \tag{1}$$

et une accélération normale

$$\gamma_N = \frac{v^2}{R} = \frac{F}{m} = \frac{qvB}{m}. \tag{2}$$

L'équation (1) montre que la vitesse est constante, soit ici $v = v_0 = \sqrt{\dfrac{2qU_0}{m}}$.

L'équation (2) donne la relation $R = \dfrac{mv_0}{qB}$ qui montre que le rayon de courbure est constant.

Si le vecteur initial $\vec{v}_0$ est perpendiculaire à $\vec{B}$, tous les éléments de la trajectoire appartiennent au plan perpendiculaire à $\vec{B}$ passant par la position initiale S. Dans ce cas, la trajectoire est un cercle de rayon $R = \dfrac{mv_0}{qB}$ parcouru à vitesse constante v_0. Le mouvement est donc circulaire uniforme.

Avec $B = 0{,}8$ T, nous avons

$$R = \frac{m}{qB}\sqrt{\frac{2qU_0}{m}} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU_0}{q}},$$

soit

$$R = \frac{1}{0{,}8}\sqrt{\frac{2 \times 1{,}67.10^{-27} \times 80\,000}{1{,}6.10^{-19}}} = 5{,}108.10^{-2}\ \text{m},$$

ou

$$R = 5{,}108\ \text{cm}.$$

b) **Point d'impact D des protons sur la plaque P.** – Les protons effectuent un demi-cercle (*fig.* 4) et viennent frapper la plaque P à la distance

$$SD = 2R = 10{,}216 \text{ cm de S.}$$

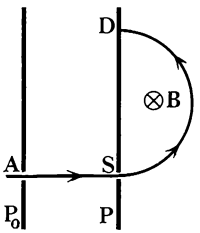


FIG. 4

Le trajet SD, de longueur πR, est parcouru à la vitesse v_0. La durée t' du trajet est donc

$$t' = \frac{\pi R}{v_0} = \frac{\pi m}{qB},$$

soit, *numériquement*,

$$t' = \frac{\pi \times 1{,}67.10^{-27}}{1{,}6.10^{-19} \times 0{,}8} = 4{,}099.10^{-8} \text{ s.}$$

c) **Nature des particules qui arrivent en D'** – L'hydrogène naturel est le mélange de trois isotopes :

^1_1H : le plus abondant;
^2_1H ou deutérium;
^3_1H ou tritium.

Le tritium est très peu abondant dans le mélange naturel, et l'impact au point D' est produit par les particules de deutérium ionisé, ou deutons.

La charge du deuton est égale à celle du proton (q), mais sa masse est double ($m' = 2m$) car le deuton est la réunion d'un proton et d'un neutron, qui possèdent sensiblement la même masse.

Le rayon de courbure de la trajectoire circulaire des deutons est

$$R' = \frac{m'}{qB}\sqrt{\frac{2qU_0}{m'}} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m'U_0}{q}}.$$

Avec $m' = 2m$, il vient

$$R' = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{4mU_0}{q}} = R\sqrt{2}.$$

Nous avons donc aussi

$$SD' = SD\sqrt{2} = 10{,}216\sqrt{2} = 14{,}448 \text{ cm.}$$

Le point D' est situé à 14,448 cm de S, du même côté que D puisque les particules sont de même polarité.

26

1. – Lois fondamentales de la dynamique.
2. – Lois du choc élastique.
3. – Action d'un champ électrique sur une particule.
4. – Action d'un champ magnétique sur une particule.
5. – Théorème de l'énergie cinétique et travail de la force électrique.
6. – Isotopes $^{3}_{2}He^{++}$ et $^{4}_{2}He^{++}$.

Le problème utilise la mécanique non relativiste. Les calculs numériques ont la précision de la règle à calcul.

1° Un noyau d'hélium lancé à la vitesse $\vec{V}_1$ heurte un proton au repos qui est projeté dans la direction de $\vec{V}_1$ et prend une vitesse $V_2 = 1{,}6\ V_1$. En déduire la masse du noyau d'hélium. Celle du proton sera prise égale à 1 u.m.a. (unité de masse atomique). Le choc est supposé élastique (la quantité de mouvement et l'énergie cinétique se conservent au cours du choc).
On donne 1 u.m.a. $= 1{,}67.10^{-27}$ kg.

2° Un noyau d'hélium, animé d'une vitesse $\vec{v}$ horizontale, pénètre en O entre les armatures horizontales AA′ et BB′ d'un condensateur plan (*fig.* 1). On suppose que le champ électrique est uniforme entre AA′ et BB′ et nul en dehors.

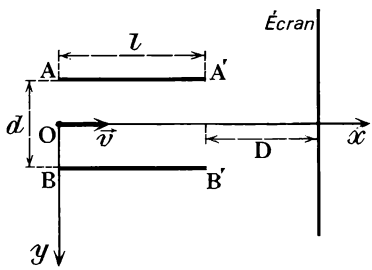


FIG. 1

Ces armatures ont pour longueur *l* et la distance qui les sépare est *d*. O est au milieu de cette distance. Le potentiel de l'armature AA′ est supérieur à celui de BB′. La différence entre ces deux potentiels est constante et égale à U.
Un écran fluorescent est placé perpendiculairement aux armatures à une distance D de A′B′.

a) Représenter la force électrique qui s'exerce sur le noyau d'hélium dès son entrée au point O dans le condensateur. Quelle est son intensité ?

b) Écrire l'équation de la trajectoire du noyau d'hélium pendant la traversée du condensateur, en rapportant cette trajectoire aux axes O*x* et O*y* de la figure 1 (on négligera l'action de la pesanteur sur le noyau d'hélium).

c) A quelle distance de l'axe O*x* le noyau sortira-t-il du condensateur ?

d) Que devient la trajectoire de la particule électrisée lorsque cette particule n'est plus soumise à l'action du champ électrique ? Calculer l'ordonnée Y_E du point d'impact sur l'écran fluorescent.

Application numérique : (pour *d* seulement) $v = 10^6$ m.s^{-1}, U = 5 000 V, $l = d = 10$ cm, D = 20 cm. On rappelle que la charge *q* du noyau d'hélium est positive et égale à deux fois la charge élémentaire *e*, avec $e = 1{,}6.10^{-19}$ C.

3° Dans une nouvelle expérience le noyau d'hélium, toujours animé de la vitesse horizontale $\vec{v}$, pénètre dans un champ magnétique uniforme de vecteur induction $\vec{B}$ perpendiculaire à $\vec{v}$ et s'exerçant sur une distance *l* comptée parallèlement à $\vec{v}$. On rappelle que la force électromagnétique agissant sur une charge *q* positive animée d'une vitesse $\vec{v}$ est normale au plan défini par $\vec{v}$ et $\vec{B}$; son sens est donné par la règle d'Ampère (c'est-à-dire que le trièdre $\vec{v}$, $\vec{B}$, $\vec{f}$ est direct). Le module de la force est $f = q.v.B.$ lorsque $\vec{v}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux.

a) Montrer que la trajectoire est circulaire et donner l'expression littérale du rayon R de la trajectoire.

b) On reçoit encore le noyau d'hélium sur un écran fluorescent qui se trouve à une distance D de la sortie du champ. Calculer l'ordonnée Y_B du point d'impact sur l'écran.

Application numérique : $v = 10^6$ m.s^{-1}; B = 10^{-2} T; $l = 10$ cm; D = 20 cm.

4° En réalité les noyaux d'hélium sont de deux sortes : ${}^3_2He^{2+}$ et ${}^4_2He^{2+}$ (on admet que les masses des noyaux sont 3 u.m.a. et 4 u.m.a.). Que peut-on dire des déplacements Y_E et Y_B précédemment calculés ? Conclure.

5° On considère maintenant un noyau d'hélium de masse *m* et de charge *q* initialement au repos; il est soumis à l'action d'une tension accélératrice U_0 avant d'être lancé dans le champ électrique du 2°. Évaluer l'énergie cinétique acquise, le déplacement Y_E et montrer que ce déplacement ne dépend plus de *m* donc que ce dispositif ne peut convenir pour séparer les deux isotopes de l'hélium.

6° Pour obtenir cette séparation on utilise le dispositif expérimental ci-contre (*fig.* 2). Les deux particules précédentes, de vitesse initiale nulle, de masses respectives m_1 et m_2 (m_1 est la masse du noyau ${}^4_2He^{2+}$) sont soumises dans la chambre C à une tension accélératrice U'_0.

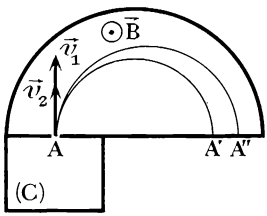


FIG. 2

Elles traversent un petit trou A avec les vitesses respectives $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ perpendiculaires à AA′ et sont soumises à l'action d'un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ orthogonal aux vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ et normal au plan de la figure.

a) Évaluer les vitesses v_1 et v_2 en fonction de *q*, U'_0, m_1 et m_2. Que vaut le rapport $\frac{v_1}{v_2}$?

b) Sous l'action du champ magnétique les noyaux d'hélium décrivent des trajectoires circulaires dont on déterminera les rayons R_1 et R_2 (utiliser les résultats établis au 3°, *a*). Évaluer le rapport $\frac{R_1}{R_2}$.

c) AA′ étant le diamètre de la trajectoire des ions ${}^3_2He^{2+}$ et AA″ celui de la trajectoire des ions ${}^4_2He^{2+}$, calculer la distance A′A″ des deux points d'impact.

Application numérique : U_0 = 10 000 V; B = 1 T.

(Bacc. C et E. Rennes. juin 1976.)

1° Calcul de la masse du noyau d'hélium. — Soit m la masse du proton et M celle du noyau d'hélium.

Avant le choc, la quantité de mouvement du système est celle, $M\vec{V}_1$, du noyau d'hélium. L'énergie cinétique du système est $\frac{1}{2} MV_1^2$.

Après le choc, la vitesse du noyau d'hélium est $\vec{v}_2$ et le proton acquiert la vitesse $1{,}6\ \vec{V}_1$. La quantité de mouvement du système est $M\vec{v}_2 + 1{,}6\, m\vec{V}_1$, et l'énergie cinétique est $\frac{1}{2} Mv_2^2 + \frac{1}{2} m\,(1{,}6\ V_1)^2$.

Posons $M = km$, et écrivons que la quantité de mouvement et l'énergie cinétique se conservent.

Toutes réductions faites, il vient

$$k\vec{V}_1 = k\vec{v}_2 + 1{,}6\ \vec{V}_1, \tag{1}$$

$$kV_1^2 = kv_2^2 + (1{,}6\ V_1)^2. \tag{2}$$

L'équation (1) montre que $\vec{v}_2$ et $\vec{V}_1$ sont colinéaires.

Projetons sur le support commun de ces deux vitesses, orienté dans le sens de $\vec{V}_1$:

$$kV_1 = kv_2 + 1{,}6\ V_1. \tag{3}$$

Nous pouvons éliminer v_2 entre les équations (2) et (3) :

$$v_2 = \frac{k - 1{,}6}{k} V_1,$$

$$kV_1^2 = k\left(\frac{k - 1{,}6}{k}\right)^2 V_1^2 + (1{,}6\ V_1)^2.$$

V_1 n'étant pas nulle, divisons par V_1^2. Nous obtenons l'équation

$$k = \frac{(k - 1{,}6)^2}{k} + (1{,}6)^2,$$

soit

$$k^2 = k^2 - 3{,}2k + (1{,}6)^2 + (1{,}6)^2 k.$$

Il vient

$$k = \frac{(1{,}6)^2}{3{,}2 - (1{,}6)^2} = \frac{1{,}6}{2 - 1{,}6} = 4.$$

La masse de la particule α (noyau d'hélium) est

$$4m = 4 \text{ u.m.a.} = 4 \times 1{,}67.10^{-27} = 6{,}68.10^{-27} \text{ kg}.$$

2° *a)* Force électrique agissant sur le noyau $^4_2$He. — Le champ électrique est dirigé dans le sens des potentiels décroissants, donc il est parallèle à l'axe Oy et de même sens que cet axe. Le module du champ est $E = \frac{U}{d}$.

La charge q du noyau d'hélium est $q = +2e$. La force agissant sur ce noyau entre les armatures est donc

$$\vec{F} = q\vec{E} = \frac{2eU}{d}\vec{j},$$

si l'on désigne par $\vec{j}$ le vecteur unitaire de l'axe Oy.

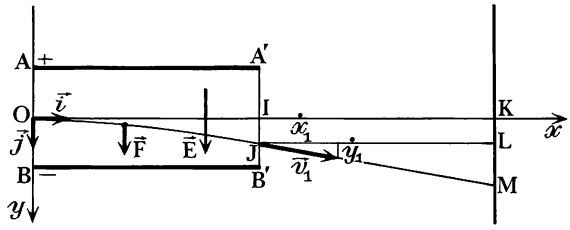


FIG. 1

L'intensité de cette force est

$$F = \frac{2eU}{d} = \frac{2 \times 1{,}6.10^{-19} \times 5\,000}{0{,}1} = 1{,}6.10^{-14}\ \text{N}.$$

***b*) Trajectoire du noyau dans le condensateur.** — Le noyau de masse M, prend l'accélération $\vec{\gamma}$ telle que que $M\vec{\gamma} = \vec{F}$, soit $\vec{\gamma} = \frac{2eU}{Md}\vec{j}$, dont les projections sur les axes Ox, Oy et Oz, formant un trièdre trirectangle avec Ox et Oy, sont

$$\ddot{x} = 0; \qquad \ddot{y} = \frac{2eU}{Md}; \qquad \ddot{z} = 0.$$

Ce noyau pénètre en O dans le champ à l'instant $t = 0$.

Les conditions initiales sont

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0,$$
$$\dot{x}_0 = v; \qquad \dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0.$$

Compte tenu de ces conditions, deux intégrations effectuées par rapport au temps donnent les projections de la vitesse à l'instant t :

$$\dot{x} = v; \qquad \dot{y} = \frac{2eU}{Md}t; \qquad \dot{z} = 0;$$

puis les coordonnées du mobile à cet instant :

$$x = vt; \qquad y = \frac{eU}{Md}t^2; \qquad z = 0.$$

Le noyau ${}_2^4\text{He}$ reste dans le plan xOy, d'équation $z = 0$.

En éliminant t entre x et y, nous obtenons l'équation de la trajectoire :

$$y = \frac{eU}{M\,dv^2}\,x^2$$

qui est un arc de parabole d'axe Oy.

c) **Ordonnée Y du noyau à sa sortie du condensateur.** — Le noyau sort du condensateur à l'abscisse $x = l$. Son ordonnée est alors

$$IJ = Y = \frac{eUl^2}{M\,dv^2} \quad (\textit{fig. 1}).$$

d) **Trajectoire de la particule en dehors du champ $\vec{E}$.** — Si l'on néglige son poids, la particule n'est plus soumise à aucune force et poursuit un mouvement rectiligne uniforme dans la direction et le sens de la vitesse acquise au sortir du champ. La particule parcourt la distance JL parallèlement à l'axe Ox, et s'écarte de cet axe de la distance LM (*fig.* 1). Soit $\dot{x}_1$ et $\dot{y}_1$ les projections de la vitesse $\vec{v}_1$ au sortir du champ. Nous pouvons écrire la proportion

$$\frac{LM}{JL} = \frac{Y_E - Y}{D} = \frac{\dot{y}_1}{\dot{x}_1}.$$

Or, la particule sort du champ à l'instant $t_1 = \dfrac{l}{v}$, et les projections de sa vitesse sont alors

$$\dot{x}_1 = v; \qquad \dot{y}_1 = \frac{2eUl}{M\,dv}.$$

Il vient

$$Y_E - Y = \frac{2eUlD}{M\,dv^2},$$

et, compte tenu de l'expression de Y,

$$Y_E = \frac{eUl}{M\,dv^2}(l + 2D).$$

Application numérique : Avec $M = 4m = 6{,}68.10^{-27}$ kg :

$$Y_E = \frac{1{,}6.10^{-19} \times 5\,000 \times 0{,}1}{6{,}68.10^{-27} \times 0{,}1 \times (10^6)^2}(0{,}1 + 2 \times 0{,}2) = 5{,}99.10^{-2}\ \text{m},$$

soit $Y_E \approx 6$ cm.

3° *a*) **Montrer que la trajectoire est circulaire.** — Rapportons le mouvement de la particule au trièdre trirectangle direct Oxyz tel que l'axe Ox soit de mêmes direction et sens que la vitesse initiale $\vec{v}_0$ et que l'axe Oz soit de mêmes direction et sens que l'induction magnétique $\vec{B}$ (*fig.* 2).

La force $\vec{F}$ agissant sur la particule est toujours perpendiculaire à $\vec{B}$, donc à l'axe Oz, et la composante F_z de la force est toujours nulle.

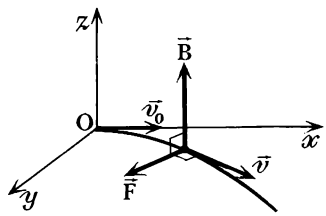


FIG. 2

La composante $\ddot{z}$ de l'accélération est donc nulle :

$$\ddot{z} = \frac{F_z}{M} = 0.$$

En intégrant par rapport au temps, nous obtenons

$$\dot{z} = \text{Cte} = \dot{z}_0 = 0,$$

puisque la vitesse initiale est le support Ox;

$$z = \text{Cte} = z_0 = 0,$$

puisque la particule est en O à l'instant $t = 0$.

Nous voyons que la particule reste dans le plan xOy perpendiculaire à $\vec{B}$. Le vecteur vitesse $\vec{v}$, qui appartient au plan xOy, est donc toujours perpendiculaire à $\vec{B}$, et la force $\vec{F}$, perpendiculaire à $\vec{B}$ et $\vec{v}$, est de module

$$F = qvB = 2evB.$$

Cette force est normale à la trajectoire, puisque perpendiculaire à $\vec{v}$. Donc

– l'accélération tangentielle est nulle : $\gamma_T = \frac{dv}{dt} = 0$;

– l'accélération normale est $\gamma_N = \frac{F}{M}$, soit $\frac{v^2}{R} = \frac{2evB}{M}$. Puisque $\frac{dv}{dt} = 0$, nous avons $v = v_0 = \text{Cte}$. La vitesse de la particule est constante, et le rayon de courbure $R = \frac{Mv}{2eB}$ de la trajectoire est également constant : $R = \frac{Mv_0}{2eB}$.

La trajectoire est donc un cercle du plan xOy, tangent en O à l'axe Ox, de rayon $R = \frac{Mv_0}{2eB}$.

***b)* Ordonnée Y_B au point d'impact sur l'écran.** – La particule sort du champ $\vec{B}$ en J et poursuit ensuite un mouvement rectiligne uniforme de trajectoire JL tangente en J à la partie circulaire $\overset{\frown}{OJ}$ de la trajectoire totale.

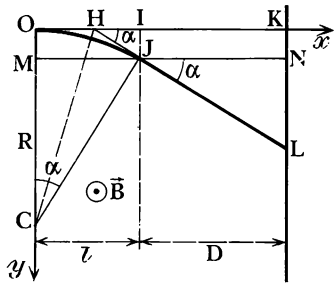


FIG. 3

Les deux tangentes Ox et HL en O et J se coupent au point H, et forment le même angle α que les rayons CO et CJ. Le point H est sur la bissectrice de l'angle OCJ, donc $OH = HJ = R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

La largeur du champ $\vec{B}$, $OI = MJ = l$, vérifie la relation trigonométrique

$$MJ = CJ \sin \alpha,$$

soit

$$l = R \sin \alpha.$$

L'angle de déflexion α est donc défini par la relation

$$\sin \alpha = \frac{l}{R} = \frac{2eBl}{Mv_0}.$$

L'ordonnée $Y_B = KL$ du point d'impact est

$$Y_B = KN + NL,$$

avec $KN = OM = R - R\cos\alpha$ et $NL = JN \operatorname{tg}\alpha = D \operatorname{tg}\alpha$. Il vient

$$Y_B = R(1 - \cos\alpha) + D \operatorname{tg}\alpha.$$

Calculons numériquement $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha = \frac{2 \times 1{,}6.10^{-19} \times 10^{-2} \times 0{,}1}{6{,}68.10^{-27} \times 10^{6}} = 4{,}79.10^{-2}.$$

L'angle α est donc un petit angle et nous pouvons utiliser les approximations $\sin\alpha \approx \alpha$, $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$ et $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$, soit $1 - \cos\alpha = \frac{\alpha^2}{2}$.

Il vient

$$Y_B = R\frac{\alpha^2}{2} + D\alpha, \qquad \text{avec} \qquad \alpha \approx \frac{2eBl}{Mv_0}.$$

Toutes réductions faites, nous obtenons

$$Y_B \approx \frac{eBl}{Mv_0}(l + 2D),$$

soit, *numériquement*.

$$Y_B = \frac{1{,}6.10^{-19} \times 10^{-2} \times 0{,}1}{6{,}68.10^{-27} \times 10^{6}}(0{,}1 + 2 \times 0{,}2) = 1{,}2.10^{-2}\ \text{m} = 1{,}2\ \text{cm}.$$

4° Action des deux champs sur le mélange des deux isotopes $^3_2He^{2+}$ et $^4_2He^{2+}$. Considérons l'action du champ électrique : avec $M = 3\,m$ nous obtenons

$$Y_{E1} = \frac{eUl}{3\,mdv^2}(l + 2D),$$

et avec $M = 4\,m$, il vient

$$Y_{E2} = \frac{eUl}{4\,mdv^2}(l + 2D);$$

donc

$$\frac{Y_{E2}}{Y_{E1}} = \frac{3}{4}.$$

Pour le champ magnétique, nous aurions

$$Y_{B1} = \frac{eBl}{3\,mv_0}(l + 2D); \qquad Y_{B2} = \frac{eBl}{4\,mv_0}(l + 2D),$$

soit encore

$$\frac{Y_{B2}}{Y_{B1}} = \frac{3}{4}.$$

Il semblerait donc que l'on puisse utiliser indifféremment l'un ou l'autre des deux champs $\vec{E}$ ou $\vec{B}$ pour séparer les isotopes.

Il semblerait même plus avantageux d'utiliser le champ $\vec{E}$ qui produit de plus grands déplacements :

$$Y_{E2} = 6 \text{ cm}; \qquad Y_{E1} = 4{,}5 \text{ cm};$$

au lieu de

$$Y_{B2} = 1{,}2 \text{ cm}; \qquad Y_{B1} = 0{,}9 \text{ cm}.$$

5° Accélération des ions. – Pour communiquer la vitesse v_0 aux ions He^{2+}, il faut utiliser un champ électrique accélérateur. L'ion He^{2+} de masse M, initialement au repos, subit la chute de potentiel U_0 et reçoit le travail $W = 2eU_0$. Il acquiert ainsi la vitesse v_0 telle que $\frac{1}{2} Mv_0^2 = 2eU_0$, soit $v_0^2 = \frac{4eU_0}{M}$.

Ensuite, il pénètre dans le champ $\vec{E}$ (question 2°) et tombe sur l'écran à l'ordonnée

$$Y_E = \frac{eUl}{Mdv_0^2}(l + 2D) = \frac{Ul}{4U_0 d}(l + 2D).$$

Nous voyons que Y_E ne dépend plus de la masse M, mais seulement des tensions U et U_0. Il est donc impossible de séparer les isotopes ^3_2He et ^4_2He en utilisant le champ $\vec{E}$ de la question 2°.

6° Séparation des isotopes.

a) Accélération des ions. – Sous l'effet de la tension accélératrice U'_0, l'ion de masse M et de charge $+ 2e$ acquiert la vitesse

$$v = \sqrt{\frac{4eU'_0}{M}}.$$

Pour l'ion $^3_2He^{++}$, de masse $M_2 = 3m$ ($m = 1{,}67.10^{-27}$ kg), nous obtenons la vitesse

$$v_2 = \sqrt{\frac{4eU'_0}{3m}},$$

et pour l'ion $^4_2He^{++}$, de masse $M_1 = 4m$, nous avons la vitesse

$$v_1 = \sqrt{\frac{4eU'_0}{4m}} = \sqrt{\frac{eU'_0}{m}}.$$

Le rapport des vitesses est

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866.$$

b) Rapport des rayons des trajectoires. – Ces rayons sont respectivement (question 3°)

$$R_1 = \frac{M_1 v_1}{2eB} \qquad \text{et} \qquad R_2 = \frac{M_2 v_2}{2eB}.$$

Leur rapport est

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{M_1 v_1}{M_2 v_2} = \frac{4v_1}{3v_2} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

c) La distance des deux points d'impact est

$$A'A'' = 2(R_1 - R_2) = 2R_1\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Or, $R_1 = \dfrac{4mv_1}{2eB} = \dfrac{4m}{2eB}\sqrt{\dfrac{eU'_0}{m}}$, soit

$$R_1 = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{mU'_0}{e}}.$$

La distance des deux points d'impact devient

$$A'A'' = \frac{4}{B}\sqrt{\frac{mU'_0}{e}}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

soit, *numériquement*,

$$A'A'' = 4\sqrt{\frac{1{,}67.10^{-27} \times 10\,000}{1{,}6.10^{-19}}}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 5{,}47.10^{-3}\ \text{m}.$$

E. — Nature ondulatoire et corpusculaire de la lumière

(Interférences, polarisation, cellule photo-électrique)

27

1. – *Dispositif interférentiel des fentes de Young.*
2. – *Calcul de l'interfrange.*
3. – *Vitesse de la lumière dans le milieu d'indice n; chemin optique.*
4. – *Interférences en lumière blanche.*

On considère deux fentes très fines, parallèles entre elles, éclairées par une fente source, distantes l'une de l'autre de $a = 0{,}12$ cm et émettant des radiations de même amplitude et en phase.

L'écran d'observation E, parallèle au plan des fentes, est à une distance $D = 300$ cm de ce plan.

1° Les fentes sont éclairées en lumière monochromatique, de longueur d'onde $\lambda = 0{,}48$ µm.

Représenter le dispositif, décrire succinctement le phénomène observé sur l'écran E. Calculer la valeur de l'interfrange *i*.

2° En utilisant une lumière monochromatique de longueur d'onde λ' et le même dispositif interférentiel, on obtient un interfrange $i' = 1{,}50$ mm. Déterminer λ'.

Pour mesurer i', on a mesuré, sur le plan E, à 0,1 mm près, la largeur couverte par 20 interfranges.

En admettant que *a* est connu à 5 µm près et D à 5 mm près, calculer l'incertitude sur la longueur d'onde λ'.

3° Tout l'espace entre les fentes et le plan E est à présent rempli par un liquide transparent d'indice de réfraction *n*. Avec la lumière monochromatique de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 0{,}48$ µm, la valeur de l'interfrange devient 0,90 mm. Calculer *n*.

4° Le dispositif est à nouveau placé dans l'air, les fentes sont éclairées en lumière monochromatique.

On interpose devant l'une des fentes une lame de mica d'épaisseur constante *e*, dont l'indice de réfraction est 1,55; la lame est parallèle au plan des fentes.

L'épaisseur de la lame étant 5,0 µm, calculer le déplacement de la frange centrale.

5° On enlève la lame de mica, les fentes sont éclairées en lumière blanche; les longueurs d'onde des radiations présentes ont toutes les valeurs entre 0,40 µm et 0,75 µm. On dispose la fente d'un spectroscope dans le plan E, parallèlement à la frange centrale et à 15 mm de celle-ci.

Déterminer les longueurs d'ondes des radiations complètement éteintes dans le spectre observé. Quel aspect présente le spectre ?

(Bacc. C et E. Poitiers, juin 1972)

1° Dispositif. Interfrange. – Le dispositif peut être celui des fentes de Young. La fente source F et les deux fentes F_1, F_2, doivent être exactement parallèles, perpendiculaires au plan de figure.

Sur l'écran E, on observe un système de franges alternativement brillantes et sombres, équidistantes, parallèles aux fentes. En M, dans le plan de symétrie du système, on observe une frange brillante dite d'ordre zéro.

Supposons d'abord que les fentes se réduisent à des trous très fins situés dans le plan de figure. Le point M de l'écran reçoit la lumière diffractée par F_1 dans

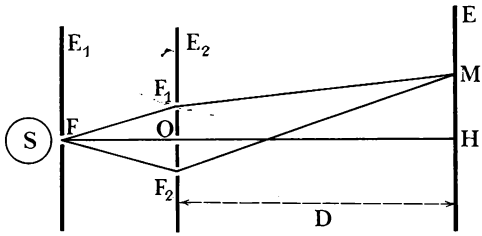


FIG. 1

la direction F_1M et la lumière diffractée par F_2 dans la direction F_2M. La différence de marche entre les vibrations reçues en M est

$$\delta = (FF_2 + F_2M) - (FF_1 + F_1M).$$

Si $FF_1 = FF_2$, il vient

$$\delta = F_2M - F_1M.$$

Nous obtenons en M un éclairement maximal si δ est égale à un nombre entier de longueurs d'ondes et un éclairement nul si δ coïncide avec un nombre impair de demi-longueurs d'onde. Donc k étant un entier,

M est sur une frange brillante si $F_2M - F_1M = k\lambda$,

M est sur une frange obscure si $F_2M - F_1M = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda$.

Ces équations définissent des hyperboloïdes très aplatis, de foyers F_1 et F_2, dont les intersections avec l'écran E sont des franges très sensiblement rectilignes.

Lorsque l'on remplace les trous par des fentes parallèles, chaque point de la fente source donne son système de franges et tous ces systèmes, identiques, se superposent. Il en résulte que l'on obtient des franges identiques à celles produites par des trous, mais plus contrastées, les franges brillantes étant plus éclairées.

Soit $HM = x$ la distance du point M à la frange centrale de trace H. Traçons l'arc de cercle F_1K, de centre M. Cet arc, très voisin d'un segment de droite, est perpendiculaire à OM et F_2M. La figure F_1F_2K est très voisine d'un triangle rectangle dont l'angle aigu α vérifie la relation

$$\sin \alpha = \frac{F_2K}{F_1F_2} = \frac{\delta}{a} \quad (\textit{fig. 2}).$$

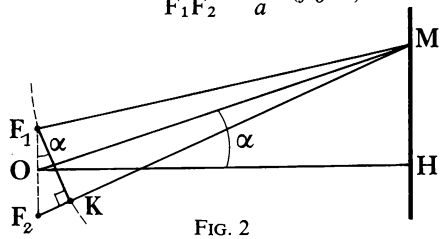


FIG. 2

Dans le triangle rectangle OHM, nous avons la relation

$$\text{tg } \widehat{HOM} = \text{tg } \alpha = \frac{HM}{OH} = \frac{x}{D}.$$

Mais HM est très petit devant OH = D et l'angle α est très petit ; donc $\sin \alpha \approx \text{tg } \alpha$ et nous pouvons écrire

$$\frac{\delta}{a} = \frac{x}{D}, \qquad \text{soit} \qquad x = \frac{D\delta}{a}.$$

Soit $p = \dfrac{\delta}{\lambda}$ l'ordre d'interférences au point M d'abscisse x_p. Nous pouvons écrire

$$x_p = \frac{D\lambda p}{a}.$$

En particulier, les abscisses des franges brillantes, pour lesquelles

$$p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, k, \ldots$$

sont de la forme

$$x_k = \frac{D\lambda k}{a}.$$

L'interfrange, i, distance séparant les centres de deux franges brillantes consécutives, est donc

$$i = x_{k+1} - x_k = \frac{D\lambda}{a}.$$

Avec

$$D = 300 \text{ cm} = 3\,000 \text{ mm}, \quad \lambda = 0{,}48 \text{ µm} = 0{,}48.10^{-3} \text{ mm}$$

et

$$a = 0{,}12 \text{ cm} = 1{,}2 \text{ mm},$$

il vient

$$i = \frac{3.10^3 \times 0{,}48.10^{-3}}{1{,}2} = 1{,}2 \text{ mm}.$$

2° Calcul de λ'. Incertitude sur λ'. — L'expression de l'interfrange $i' = \dfrac{D\lambda'}{a}$ donne ici

$$\lambda' = \frac{ai'}{D} = \frac{1{,}2 \times 1{,}5}{3\,000} = 0{,}6.10^{-3} \text{ mm} = 0{,}6 \text{ µm}.$$

L'incertitude absolue sur l'interfrange est

$$\Delta i' = \frac{0{,}1}{20} = 0{,}005 \text{ mm}.$$

De même, $\Delta a = 5$ µm $= 0{,}005$ mm.

La règle des incertitudes relatives donne la relation

$$\frac{\Delta\lambda'}{\lambda'} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta i'}{i'} + \frac{\Delta D}{D},$$

soit

$$\frac{\Delta\lambda'}{\lambda'} = \frac{0{,}005}{1{,}2} + \frac{0{,}005}{1{,}5} + \frac{5}{3\,000} = \frac{55}{6\,000} < \frac{1}{100}.$$

Il vient $\Delta\lambda' = 0{,}6 \times \frac{1}{100} = 0{,}006$ µm, donc

$$\lambda' = (0{,}600 \pm 0{,}006)\ \mu\text{m}.$$

3° Calcul de l'indice du liquide. – La longueur d'onde λ_n de la lumière dans le liquide d'indice n est donnée par la formule de l'interfrange :

$$\lambda_n = \frac{ai_n}{D} = \frac{1{,}2 \times 0{,}90}{3.10^3} = 0{,}36.10^{-3}\ \text{mm},$$

soit

$$\lambda_n = 0{,}36\ \mu\text{m}.$$

La longueur d'onde est égale au produit de la période T, invariable, de la vibration lumineuse, par la vitesse de propagation V de la lumière dans le milieu considéré. Nous avons donc

– dans le liquide d'indice n : $\lambda_n = VT$,
– dans le vide (ou l'air) : $\lambda = cT$.

Il vient $\frac{\lambda_n}{\lambda} = \frac{V}{c}$. Or, l'indice de réfraction d'un corps transparent exprime le rapport de la vitesse de la lumière dans le vide, à sa vitesse dans le corps étudié :

$$n = \frac{c}{V}.$$

Nous avons donc $\frac{\lambda_n}{\lambda} = \frac{1}{n}$, soit

$$n = \frac{\lambda}{\lambda_n} = \frac{0{,}48}{0{,}36} = \frac{4}{3} = 1{,}333.$$

Ce liquide est vraisemblablement de l'eau.

4° Déplacement de la frange centrale provoquée par la lame de mica. – Lorsque l'on place la lame devant la fente F_1, on remplace, pour le rayon F_1M, un parcours e effectué dans l'air à la vitesse c, par un parcours e effectué dans le mica à la vitesse $\frac{c}{N}$. La durée du parcours e, qui était $\frac{e}{c}$ devient

$$\frac{eN}{c}, \text{ et s'accroît de } \frac{e}{c}(N - 1).$$

Pour le rayon F_1M, tout se passe donc comme si le parcours, totalement effectué dans l'air, possédait la longueur

$$(F_1M) = F_1M + e(N - 1).$$

La différence de marche au point M devient

$$\delta = F_2M - F_1M = F_2M - F_1M - e(N - 1) = \frac{ax}{D} - e(N - 1).$$

L'abscisse x_k de la frange brillante d'ordre k devient

$$x_k' = \frac{D\delta_k}{a} + \frac{eD(N - 1)}{a} = k\frac{D\lambda}{a} + \frac{eD(N - 1)}{a}.$$

Or, avant de placer la lame, cette abscisse était $x_k = k\dfrac{D\lambda}{a}$. Le déplacement de la frange brillante d'ordre k est donc

$$\Delta x_k = x'_k - x_k = \frac{eD(N-1)}{a}.$$

C'est aussi le déplacement de la frange centrale, pour laquelle $k = 0$.

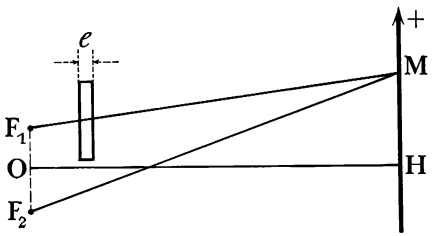


FIG. 3

La relation $\delta = F_2M - F_1M$ implique que la différence de marche et l'ordre d'interférence soient positifs lorsque $F_2M > F_1M$, donc lorsque $\overline{HM} = x$ est positif (*fig.* 3). Le déplacement Δx_k, étant positif, s'effectue du côté de F_1, donc du côté de la fente couverte par la lame de mica.

Numériquement, il vient

$$\Delta x_k = \frac{5.10^{-3} \times 3.10^3 \times 0{,}55}{1{,}2} \simeq 6{,}875 \text{ mm}.$$

5° Longueurs d'ondes des radiations éteintes. — A la distance $x = 15$ mm de la frange centrale, la différence de marche est

$$\delta = F_2M - F_1M = \frac{ax}{D} = \frac{1{,}2 \times 15}{3\,000} = \frac{6}{1\,000} \text{ mm} = 6\ \mu\text{m}.$$

Pour la radiation de longueur d'onde λ, l'ordre d'interférence est

$$p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{6}{\lambda}.$$

Lorsque λ croît de 0,4 μm à 0,75 μm, l'ordre d'interférence à la distance $x = 15$ mm de la frange centrale décroît uniformément de $\dfrac{6}{0{,}4} = 15$ à $\dfrac{6}{0{,}75} = 8$.

En ce point, toutes les radiations dont l'ordre d'interférence est de la forme $k + \dfrac{1}{2}$ (k entier) sont éteintes. Les ordres d'interférences des radiations éteintes sont donc

14,5; 13,5; 12,5; 11,5; 10,5; 9,5; 8,5.

Leurs longueurs d'ondes, données par la formule

$$\lambda = \frac{\delta}{p} = \frac{6}{p}$$

sont donc

p	14,5	13,5	12,5	11,5	10,5	9,5	8,5
λ (μm)	0,413	0,444	0,480	0,522	0,571	0,631	0,706

Le spectre obtenu est cannelé. Chaque radiation éteinte donne une raie noire dans le spectre.

Il existe sept cannelures noires : une dans le violet (0,413 μm), une dans l'indigo (0,444 μm), une dans le bleu (0,480 μm), une dans le vert (0,522 μm), une dans le vert-jaune (0,571 μm), une dans l'orangé (0,631 μm) et une dans le rouge (0,706 μm).

28

1. – **Fentes de Young.**
2. – **Interfrange.**
3. – **Chemin optique.**
4. - ***Coïncidences entre franges de couleurs différentes.***
5. – **Interférences en lumière blanche.**
6. – ***Polarisation de la lumière : Loi de Malus*** $I = I_0 \cos^2 \alpha$.

Une fente fine S éclairée par une lumière monochromatique de longueur d'onde λ est placée à égale distance de deux fentes fines S_1 et S_2 parallèles entre elles et parallèles à S. Les fentes S_1 et S_2 sont distantes de $a = 2$ mm et distantes de S de $L = 60$ cm.
On observe les franges d'interférences sur un écran placé à $d = 4$ m du plan de S_1 et S_2.

1° On compte cinq franges brillantes de chaque côté de la frange centrale, les milieux des franges extrêmes étant séparés par une distance $l = 9$ mm. Déterminer la valeur de λ.

2° On place devant S_1 une lame à faces parallèles d'épaisseur e et d'indice de réfraction $n = 1{,}5$ pour la radiation λ. La frange centrale se déplace d'une distance $x_0 = 5$ cm. Calculer e.

3° Quel déplacement vertical y de la fente S faut-il effectuer, et dans quel sens, pour ramener la frange centrale sur l'axe du système ?

4° Deux radiations $\lambda_1 = 0{,}5$ µm et $\lambda_2 = 0{,}6$ µm éclairent maintenant la fente S.
A quelle distance de l'axe du système observe-t-on la première coïncidence des franges brillantes correspondant à λ_1 et λ_2 ?

5° On éclaire maintenant S avec une lumière blanche comprenant toutes les radiations de longueurs d'onde comprises entre 0,41 µm et 0,75 µm. On place, dans le plan d'observation, à une distance $x = 6$ mm de l'axe, la fente d'un spectroscope.
Qu'observe-t-on ? Déterminer les longueurs d'onde des radiations manquantes.

6° On fait arriver la lumière blanche précédente, supposée non polarisée sur un ensemble polariseur, analyseur réglé de manière à obtenir le maximum de lumière.
On fait alors tourner l'analyseur d'un angle tel que l'intensité de la lumière transmise soit diminuée de moitié. Quelle est la valeur de l'angle dont on a fait tourner l'analyseur ?

(Bacc. C et E. Reims. septembre 1972.)

1° Longueur d'onde de la lumière employée. – Les franges brillantes correspondent aux points de l'écran dont les distances à S_1 et S_2 diffèrent d'un nombre entier de longueurs d'onde. En particulier, la frange centrale, correspondant à une différence nulle, est brillante. Les mesures étant effectuées à partir du milieu

des franges brillantes, on mesure la largeur de franges obscures comprises entre les deux franges repérées.

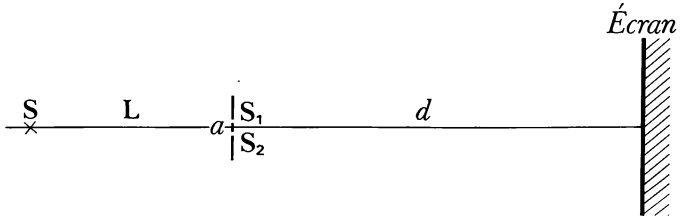


FIG. 1

Il y en a 5 de chaque côté, on en mesure donc 10. Ces 10 franges occupent sur l'écran une largeur de 9 mm, l'interfrange est donc 0,9 mm.

L'interfrange dans le cas de fentes sources est donné par la formule classique :

$$i = \frac{\lambda d}{a},$$

avec les notations de l'énoncé. On en déduit

$$\lambda = \frac{ia}{d},$$

soit, *numériquement*,

$$\lambda = \frac{9 \times 10^{-4} \times 2 \times 10^{-3}}{4} = 4{,}5 \times 10^{-7} \text{ m, ou encore } 0{,}45 \text{ µm, ou } 450 \text{ nm};$$

il s'agit d'une lumière bleue.

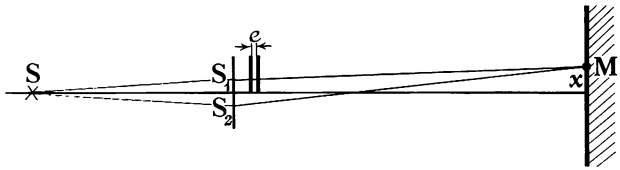


FIG. 2

2° Interposition d'une lame réfringente. – En l'absence de la lame, la différence de marche δ entre les rayons issus de S_1 et de S_2, en un point d'ordonnée x sur l'écran, est

$$\delta = S_1M - S_2M = -a\frac{x}{d}.$$

Mais à l'intérieur de la lame, d'indice de réfraction n, le chemin optique n'est plus e mais ne et il a donc subi une augmentation de $(n - 1)e$; le chemin optique de S_1 à M est donc

$$[S_1M] = S_1M + e(n - 1).$$

La différence de marche entre les deux rayons est maintenant

$$\delta' = [S_1M] - S_2M = e(n - 1) - a\frac{x}{d},$$

et la frange centrale, correspondant à la différence de marche nulle, qui se trouvait précédemment au centre de l'écran, se retrouve de ce fait en x_0, tel que

$$(n - 1)e - a\frac{x_0}{d} = 0,$$

soit

$$x_0 = (n - 1)e\frac{d}{a}.$$

On a donc

$$e = \frac{ax_0}{(n - 1)d} = \frac{2 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^{-2}}{0{,}5 \times 4} = 5 \times 10^{-5}\ \text{m}, \quad \text{ou} \quad 5 \times 10^{-2}\ \text{mm}.$$

3° Remise dans l'axe de la frange centrale. — Un déplacement y de la source S introduit dans l'expression de δ un terme supplémentaire d'expression

$$-y\frac{a}{L}.$$

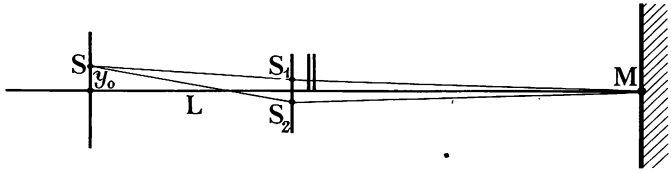


FIG. 3

La différence de marche devient donc, de S à M,

$$\delta'' = SS_1 + [S_1M] - (SS_2 + S_2M) = SS_1 - SS_2 + S_1M - S_2M + e(n - 1).$$

Mais

$$SS_1 - SS_2 = -\frac{ay}{L} \quad \text{et} \quad S_1M - S_2M = -\frac{ax}{d};$$

donc

$$\delta'' = -\frac{ay}{L} - \frac{ax}{d} + e(n - 1).$$

Pour la frange centrale, nous avons $\delta'' = 0$ et son abscisse x_0 doit être nulle, donc

$$0 = -\frac{ay}{L} + e(n - 1)$$

et

$$y_0 = (n - 1)e\frac{L}{a} = 0{,}5 \times 5 \times 10^{-5}\frac{0{,}6}{2 \times 10^{-3}} = 7{,}5 \times 10^{-3}\ \text{m}, \quad \text{ou} \quad 7{,}5\ \text{mm}.$$

4° Lumière composée de deux radiations. – Chacune des radiations crée son système de franges indépendamment de l'autre. A chacune correspond un interfrange :

– pour λ_1 : $i_1 = \lambda_1 \frac{d}{a}$,

– pour λ_2 : $i_2 = \lambda_2 \frac{d}{a}$.

La première coïncidence des franges brillantes se produira lorsque n franges correspondant au plus grand des deux interfranges, auront la même largeur que $n + 1$ franges correspondant au plus petit.

Numériquement,

$$i_1 = 0{,}5 \times 10^{-6} \times \frac{4}{2 \times 10^{-3}} = 10^{-3} \text{ m},$$

$$i_2 = 0{,}6 \times 10^{-6} \times \frac{4}{2 \times 10^{-3}} = 1{,}2 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

Nous cherchons donc n tel que

$$n \times 1{,}2 \times 10^{-3} = (n + 1) \times 10^{-3},$$

soit

$$n = 5.$$

La distance correspondante est $5 \times 1{,}2 \times 10^{-3}$ m, soit 6 mm.

5° Éclairage en lumière blanche. – On observera dans le spectroscope un spectre cannelé, c'est-à-dire une alternance de bandes brillantes et sombres. Le centre d'une bande sombre correspond à une radiation dont la différence de marche à l'arrivée sur la fente du spectroscope est de la forme $(2k + 1)\frac{\lambda}{2}$. Le centre d'une bande brillante correspond à une radiation telle que $\delta = k'\lambda$. L'intensité lumineuse varie en fait continûment entre les deux extrêmes le long du spectre.

Reprenons l'expression de la différence de marche en un point d'ordonnée x sur l'écran :

$$\delta = -a\frac{x}{d}.$$

Nous observerons l'extinction des radiations pour

$$\delta = -a\frac{x}{d} = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}.$$

Au point M, la différence de marche est

$$\delta = -\frac{ax}{d} = -\frac{2.10^{-3} \times 6.10^{-3}}{4} = -3.10^{-6} \text{ m} = -3 \text{ µm}.$$

Pour la radiation λ, l'ordre d'interférence est $p = \frac{\delta}{\lambda}$ et cet ordre décroît de

$$p_1 = -\frac{3}{0{,}75} = -4 \quad \text{à} \quad p_2 = -\frac{3}{0{,}41} = -7{,}3,$$

si λ décroît de 0,75 µm à 0,41 µm.

Les radiations manquantes correspondent aux valeurs demi entières de p contenues dans $[p_1, p_2]$, soit ici

$$p = -4{,}5, \qquad -5{,}5, \qquad -6{,}5,$$

d'où les valeurs de λ :

$$\lambda = \frac{\delta}{p} = -\frac{3}{p}.$$

p	$-4{,}5$	$-5{,}5$	$-6{,}5$
λ (μm)	0,667	0,545	0,462

6° Polarisation de la lumière. — A la sortie du polariseur, la vibration lumineuse se fait dans un plan bien défini. L'analyseur décompose cette vibration suivant ses propres axes et transmet l'une des deux composantes en absorbant l'autre.

Le maximum de lumière est obtenu lorsque la direction de l'analyseur est telle que la direction de la vibration incidente coïncide avec celle de la vibration transmise par l'analyseur.

Si l'on tourne alors l'analyseur d'un angle α, il y a décomposition : la composante en sin α est éteinte et la composante en cos α est transmise.

L'intensité lumineuse étant proportionnelle au carré de l'amplitude de la vibration, elle varie donc en fonction de $\cos^2 \alpha$: c'est la loi de Malus.

L'intensité est donc diminuée de moitié pour

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2},$$

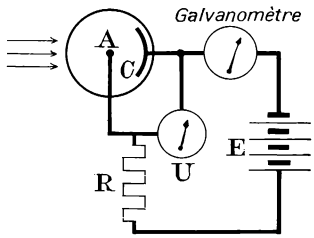
soit

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{et} \qquad \alpha = \pm 45°.$$

29

1. – Travail du champ électrique $W = q(U_1 - U_2)$.
Théorème de l'énergie cinétique.
2. – *Potentiel d'arrêt.*
3. – *Seuil photo-électrique ; énergie d'un photon ; travail d'extraction* W_0 :
$hN \geqslant W_0$.
4. – Polarisation de la lumière, loi de Malus : $I = I_0 \cos^2 \alpha$.
5. – Fentes de Young; interfrange.

Dans le montage du schéma ci-dessous, la cellule photo-électrique à vide, comportant une cathode recouverte de potassium, est éclairée par une source de lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda < 0{,}55$ micromètre. La tension aux bornes du générateur E



étant 80 volts, la résistance en série, R, égale à 10^6 ohms, l'intensité dans le circuit atteint la valeur de saturation, $I = 3.10^{-5}$ ampère.

1° *a*) Quel est le nombre d'électrons arrachés à la cathode par seconde ?

b) Quel est, en joules et en électronvolts, l'accroissement d'énergie communiqué à chaque électron par la différence de potentiel U existant entre anode et cathode ?

c) Soit v_0 la valeur numérique maximale de la vitesse des électrons sortant du métal de la cathode : exprimer, en fonction de v_0 et de *m* (masse de l'électron), la valeur U_0 de la différence de potentiel $V_A - V_C$ entre l'anode et la cathode qui permet d'arrêter les électrons juste avant leur impact sur l'anode (U_0 = potentiel d'arrêt). Calculer v_0 pour $U = -0{,}60$ V.

2° Si $\lambda > 0{,}55$ µm, l'intensité dans le circuit reste constamment nulle. Interpréter cette observation. On rappelle que le travail d'extraction d'un électron d'un métal est caractéristique de ce métal et que l'énergie d'un photon de fréquence N est hN ($h = 6{,}62.10^{-34}$ joule-seconde).

Calculer le travail d'extraction pour le potassium, en joules et en électronvolts.

3° On éclaire de nouveau la cellule avec une lumière de longueur d'onde $\lambda < 0{,}55$ µm et l'on place en avant de la cellule, perpendiculairement au faisceau lumineux, deux lames polaroïd parallèles entre elles; leurs plans de polarisation forment un angle α que l'on fait varier de 0° à 180 °. On désignera par I_0 l'intensité maximale du courant débité par la cellule et par I celle qui correspond à une valeur quelconque de α : tracer la courbe représentant $\frac{I}{I_0}$ en fonction de l'angle α, la tension U restant constante.

Échelles : **angle α en abscisse : 1 cm pour 20°; $\frac{I}{I_0}$ en ordonnée : 10 cm = 1.**

4° On mesure la longueur d'onde de la lumière utilisée grâce au dispositif interférentiel des fentes de Young. Dans le système de franges obtenu, lorsque la lumière de longueur d'onde λ éclaire les fentes, on compte 10 interfranges sur une distance $d = 7{,}90$ mm. Le même dispositif, éclairé par la lumière de longueur d'onde $\lambda_0 = 0{,}550$ µm donne une distance $d_0 = 8{,}00$ mm pour 8 interfranges.

Calculer λ.

On donne :

$$e = 1{,}6.10^{-19}\ \text{C}, \quad m = 9{,}1.10^{-31}\ \text{kg}, \quad c = 3.10^8\ \text{m.s}^{-1}.$$

(Bacc. C et E. Cambodge et Laos, juin 1972)

1° *a*) Nombre d'électrons arrachés à la cathode par seconde. — Chaque électron arraché à la cathode correspond à l'écoulement dans le circuit d'une charge $-e = -1{,}6.10^{-19}$ C en sens inverse du sens conventionnel du courant. Ce déplacement équivaut à celui d'une charge positive $+e$ dans le sens conventionnel.

Soit n le nombre d'électrons arrachés à la cathode en 1 seconde. L'intensité du courant est $I = ne$, et nous pouvons calculer n :

$$n = \frac{I}{e} = \frac{3.10^{-5}}{1{,}6.10^{-19}} = 1{,}875.10^{14} \text{ électrons par seconde.}$$

***b*) Accroissement d'énergie communiqué à chaque électron entre la cathode et l'anode.** — Soit V_A et V_C les potentiels respectifs de l'anode et de la cathode. Une charge $q = -e$ qui passe de la cathode sur l'anode reçoit, de la part du champ électrique, un travail $w = q(V_C - V_A)$, soit

$$w = -e(V_C - V_A) = e(V_A - V_C) = eU.$$

Ce travail se convertit en énergie cinétique pour les électrons, dont la vitesse croît entre la cathode et l'anode. Les résistances du générateur et du galvanomètre peuvent être négligées devant $R = 10^6\ \Omega$.

Suivons les variations du potentiel dans le circuit, parcouru dans le sens du courant C, E, R, A; nous obtenons l'équation

$$V_C + E - RI = V_A, \quad \text{soit} \quad V_A - V_C = E - RI.$$

L'accroissement d'énergie d'un électron entre C et A est donc

$$W = e(E - RI) = 1{,}6.10^{-19}(80 - 10^6 \times 3.10^{-5}) = 80.10^{-19}\ \text{J},$$

soit

$$W = 8.10^{-18}\ \text{J}.$$

Entre C et A, le potentiel de chaque électron croît de

$$80 - 10^6 \times 3.10^{-5} = 50 \text{ V}.$$

L'énergie acquise par l'électron est donc 50 eV.

c) **Vitesse d'émission des électrons par la cathode.** – L'énergie acquise par un électron entre C et A est $W = e(V_A - V_C)$. Soit v_0 la vitesse maximale d'émission des électrons par la cathode, et v_1 leur vitesse à l'arrivée sur l'anode. D'après le théorème de l'énergie cinétique, nous pouvons écrire

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W = e(V_A - V_C).$$

Si la d.d.p. $V_A - V_C$ est négative, le travail reçu par les électrons est résistant, et leur vitesse diminue entre C et A. Lorsque cette d.d.p. prend la valeur

$$V_A - V_C = U_0 = -0{,}60 \text{ V},$$

les électrons les plus rapides, c'est-à-dire ceux émis avec la vitesse maximale v_0, arrivent sur l'anode avec une vitesse nulle ($v_1 = 0$). Les autres électrons, émis avec une vitesse inférieure à v_0, s'arrêtent avant d'atteindre l'anode et retombent sur la cathode.

Si $V_A - V_C$ est inférieure à U_0, tous les électrons sont arrêtés avant d'atteindre l'anode, et le courant photo-électrique s'annule. U_0 est le potentiel d'arrêt, défini par la relation

$$0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = eU_0.$$

Avec $U_0 = -0{,}60$ V, il vient

$$v_0 = \sqrt{-\frac{2eU_0}{m}} = \sqrt{-\frac{2 \times 1{,}6.10^{-19} \times (-0{,}60)}{9{,}1.10^{-31}}},$$

soit

$$v_0 = 4{,}59.10^5 \text{ m/s} = 459 \text{ km/s}.$$

2° Seuil photo-électrique. – Un photon ne peut extraire un électron du métal que si son énergie $h\mathrm{N}$ est au moins égale au travail d'extraction W_0. L'existence de l'effet photo-électrique dépend donc de la condition $h\mathrm{N} \geqslant W_0$. En introduisant la longueur d'onde $\lambda = \frac{c}{\mathrm{N}}$, il vient $\frac{hc}{\lambda} \geqslant W_0$, soit $\lambda \leqslant \frac{hc}{W_0}$.

La longueur d'onde de la lumière incidente doit être inférieure à la longueur d'onde limite

$$\lambda_0 = \frac{hc}{W_0}.$$

Pour le potassium, $\lambda_0 = 0{,}55$ µm $= 5{,}5.10^{-7}$ m. Si la cellule est éclairée par une lumière de longueur d'onde $\lambda > \lambda_0$, l'effet photo-électrique ne peut pas se produire. Le circuit est alors coupé entre C et A, et l'intensité I reste nulle.

Le travail d'extraction, pour le potassium, est

$$W_0 = \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{6{,}62.10^{-34} \times 3.10^8}{5{,}5.10^{-7}},$$

soit

$$W_0 = 3{,}61.10^{-19}\ \text{J}.$$

Exprimée en électronvolts, la valeur de ce travail est

$$W_0 = \frac{3{,}61.10^{-19}}{1{,}6.10^{-19}} = 2{,}25\ \text{eV}.$$

3° Courbe représentative de $\frac{I}{I_0}$. — La première lame polaroïd P_1 est le polariseur, et la seconde P_2, est l'analyseur. Avant P_1, la lumière émise par la source est naturelle. Dans cette lumière, la direction de la vibration lumineuse $\vec{E}$, normale à la direction de propagation de la lumière, peut s'effectuer dans une direction quelconque du plan normal (N_1).

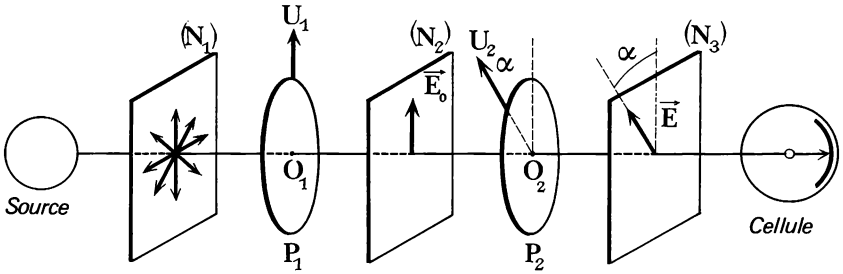


FIG. 1

Le polaroïd P_1 ne laisse passer, pour chaque vibration lumineuse, que la composante $\vec{E}_0$ correspondant à son plan de polarisation. Entre P_1 et P_2, la lumière est polarisée dans la direction $\overrightarrow{O_1U_1}$ imposée par P_1.

Le polaroïd P_2 reçoit la vibration lumineuse $\vec{E}_0$, mais il ne laisse passer que la composante de direction $\overrightarrow{O_2U_2}$ correspondant à son propre plan de polarisation. Il en résulte que le module E de la vibration transmise par P_2 est $E = E_0 \cos \alpha$ (*fig.* 2).

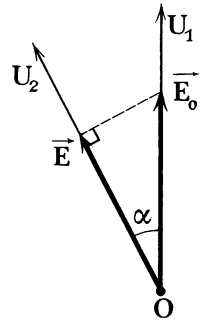


FIG. 2

Donc, si P_1 laisse passer la vibration lumineuse (en O_1) $\vec{y}_1 = \vec{E}_0 \sin \omega t$, de direction $\overrightarrow{O_1U_1}$, l'analyseur P_2 laisse passer, en O_2, la vibration lumineuse

$$\vec{y}_2 = \vec{E} \sin (\omega t - \varphi),$$

de direction $\overrightarrow{O_2U_2}$ (φ est un retard de phase correspondant au trajet O_1O_2).

La puissance transportée par un phénomène vibratoire est proportionnelle au carré de l'amplitude de l'onde. *En une seconde*, le polariseur P_1 laisse passer une énergie

$$W_0 = kE_0^2,$$

tandis que l'analyseur P_2 ne transmet à la cellule que l'énergie

$$W = kE^2 = kE_0^2 \cos^2 \alpha.$$

Le rapport de l'énergie W reçu par la cellule en 1 s à l'énergie W_0 transmise par P_1 dans le même temps est donc

$$\frac{W}{W_0} = \frac{kE_0^2 \cos^2 \alpha}{kE_0^2} = \cos^2 \alpha.$$

Or, l'énergie transmise par un rayonnement est proportionnelle au nombre de photons transportés par le rayonnement. Soit n_0 le nombre des photons qui traversent P_1 en une seconde, et soit n le nombre de ceux qui traversent P_2 et atteignent la cellule. Nous avons

$$W = nhN \quad \text{et} \quad W_0 = n_0 hN \quad (N : \text{fréquence}).$$

Nous obtenons le rapport

$$\frac{n}{n_0} = \cos^2 \alpha.$$

Le nombre des électrons arrachés à la cathode en une seconde, donc aussi l'intensité du courant, sont proportionnels au nombre par seconde des photons incidents. Nous pouvons écrire

$$I = Kn,$$

l'intensité maximale du courant étant

$$I_0 = Kn_0,$$

obtenue lorsque $\cos^2 \alpha = 1$. Il vient finalement

$$\frac{I}{I_0} = \cos^2 \alpha.$$

Compte tenu de la symétrie

$$\cos^2 \alpha = \cos^2 (\pi - \alpha),$$

Il suffit de calculer les valeurs de $\cos^2 \alpha$ pour $0 \leqslant \alpha \leqslant 90°$:

α (degrés)	0	10	20	30	40
$\cos \alpha$	1	0,985	0,940	0,866	0,766
$\cos^2 \alpha$	1	0,970	0,883	0,750	0,587
α (degrés)	180	170	160	150	140
α (degrés)	50	60	70	80	90
$\cos \alpha$	0,643	0,500	0,342	0,174	0
$\cos^2 \alpha$	0,414	0,250	0,117	0,030	0
α (degrés)	130	120	110	100	90

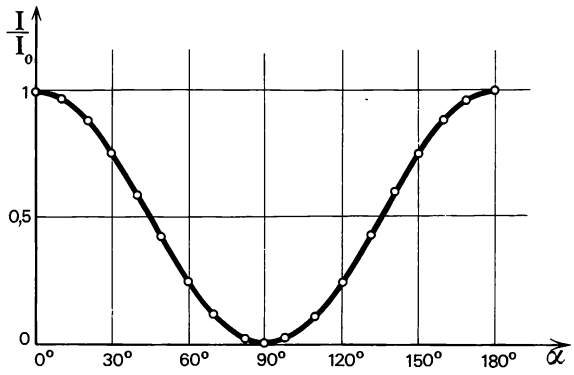


FIG. 3. — Courbe $\frac{I}{I_0} = f(\alpha)$.

4° Calcul de la longueur d'onde de la lumière incidente. — Soit a l'écartement des deux fentes, D la distance des fentes à l'écran et λ la longueur d'onde de la lumière. A la distance HM $= x$ de la frange centrale, la différence de marche est $\delta = \frac{ax}{D}$.

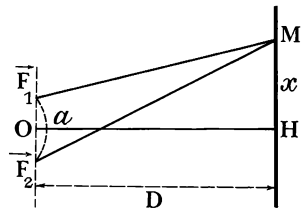


FIG. 4

Pour les franges brillantes, la différence de marche est de la forme $x_k = k\lambda$, avec k entier.

Les abscisses des franges brillantes sont donc

$$x_k = k\frac{D\lambda}{a},$$

et la valeur de l'interfrange est

$$i = x_{k+1} - x_k = \frac{D\lambda}{a}.$$

Avec la lumière de longueur d'onde λ, la longueur de $j = 10$ interfranges est $d = 7{,}90$ mm. Nous avons

$$d = j\frac{D\lambda}{a}.$$

Avec la lumière $\lambda_0 = 0{,}550$ µm, la longueur de $j_0 = 8$ interfranges est $d_0 = 8{,}00$ mm. Nous pouvons écrire

$$d_0 = j_0\frac{D\lambda_0}{a}.$$

En éliminant $\frac{D}{a}$, il vient,

$$\frac{d}{d_0} = \frac{j}{j_0}\frac{\lambda}{\lambda_0},$$

soit

$$\lambda = \lambda_0\frac{d}{d_0}\frac{j_0}{j}.$$

Compte tenu des valeurs numériques, il vient

$$\lambda = 0{,}550 \times \frac{10}{8} \times \frac{7{,}90}{8} = 0{,}678\,9 \ \mu\text{m}.$$

En admettant que l'incertitude soit de l'ordre du dernier chiffre significatif, nous avons

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0} + \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta d_0}{d_0},$$

car il n'y a pas d'incertitudes sur les entiers j et j_0.

Donc

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{550} + \frac{1}{790} + \frac{1}{800} = \frac{1{,}82 + 1{,}27 + 1{,}25}{1\,000},$$

soit

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{4{,}34}{1\,000} < \frac{5}{1\,000}.$$

Il vient

$$\Delta\lambda = 0{,}678\,9 \times \frac{5}{1\,000} = 0{,}003\,4 < 0{,}004.$$

Nous écrirons donc

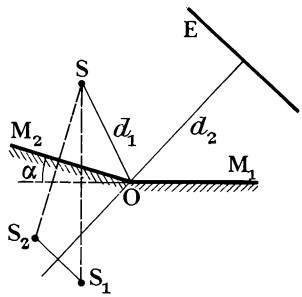
$$\lambda = (0{,}679 \pm 0{,}004) \ \mu\text{m}.$$

30

1. – *Dispositif interférentiel des miroirs de Fresnel.*
2. – Interfrange.
3. – *Éclairement de l'écran,* proportionnel au carré de l'amplitude de la lumière.
4. – Superposition de systèmes de franges.
5. – Cellule photo-électrique : seuil photo-électrique, énergie des électrons émis, potentiel d'arrêt.

On utilise, pour produire des franges d'interférences lumineuses, le dispositif des miroirs de Fresnel. Les surfaces réfléchissantes de deux miroirs identiques, M_1 et M_2, ont une arête commune, O, et forment un dièdre d'angle égal à $(\pi - \alpha)$, α étant petit.

Soit S_1 et S_2 les images données par les deux miroirs M_1 et M_2 d'une source lumineuse ponctuelle, monochromatique, S, qui se trouve à une distance d_1 de O.



1° On observe les franges d'interférences sur un écran E, parallèle à S_1S_2 et à l'arête commune, O, des deux miroirs, et à une distance d_2 de cette arête.

***a*) Expliquer la formation de ces franges. Préciser leur direction.**

Qu'appelle-t-on frange centrale ? Où se trouve-t-elle sur l'écran ?

Définir et calculer littéralement l'interfrange.

Application numérique : $d_1 = 50$ cm, $d_2 = 2$ m, $\alpha = 2{,}5.10^{-3}$ rd, $\lambda = 0{,}55$ µm.

***b*) On remplace la source ponctuelle S par une fente-source F, parallèle à l'arête commune des deux miroirs. Qu'observe-t-on ?**

***c*) Étudier les variations de l'éclairement des différents points de l'écran en fonction de leur distance x à la frange centrale. (L'éclairement est proportionnel au carré de l'amplitude de la vibration résultante.)**

***d*) Dans le cas où les deux miroirs ne sont plus identiques, les deux vibrations réfléchies ont des amplitudes R_1a et R_2a (R_1 et R_2 étant les pouvoirs réflecteurs des deux miroirs).**

Comment l'éclairement de l'écran varie-t-il maintenant ?

Quelle est sa valeur minimale ?

2° La source lumineuse n'est plus monochromatique; elle émet simultanément deux radiations de longueur d'onde $\lambda = 0{,}55$ µm et $\lambda' = 0{,}44$ µm.

Quel est l'aspect du champ d'interférences ?

A quelle distance de la frange centrale la première coïncidence entre les deux systèmes de franges se produit-elle ?

3° La source lumineuse étant celle de la question précédente, on place dans le plan de l'écran, à une distance de 3,3 mm de la frange centrale et parallèlement à la direction des franges, la fente fine d'un spectroscope.

Décrire le phénomène observé.

4° On place maintenant, derrière la fente fine qui se trouve à 3,3 mm de la frange centrale, une cellule photo-électrique au césium (métal pour lequel le travail d'extraction d'un électron est $W_e = 1{,}8$ eV).

***a*) La cellule émettra-t-elle des électrons ?**

***b*) Quelle sera leur énergie cinétique maximale ?**

***c*) Quelle tension faudrait-il appliquer entre le métal photo-émissif et l'anode pour annuler le courant photo-électrique ?**

Constante de Planck : $h = 6{,}62.10^{-34}$ J.s.
Célérité de la lumière : $c = 3.10^8$ m/s.
Charge de l'électron : $e = -1{,}6.10^{-19}$ C.

(Bacc. C et E. Orléans-Tours. juin 1973.)

1° *a*) Formation des franges. Interfrange. – Les images virtuelles S_1 et S_2 sont les sommets de deux faisceaux coniques émergents, l'un du miroir M_1, l'autre du miroir M_2. Ces images constituent donc deux sources ponctuelles pour la région de l'espace éclairée par les miroirs. Les deux faisceaux ont une partie commune OAB (doublement hachurée sur la figure 1).

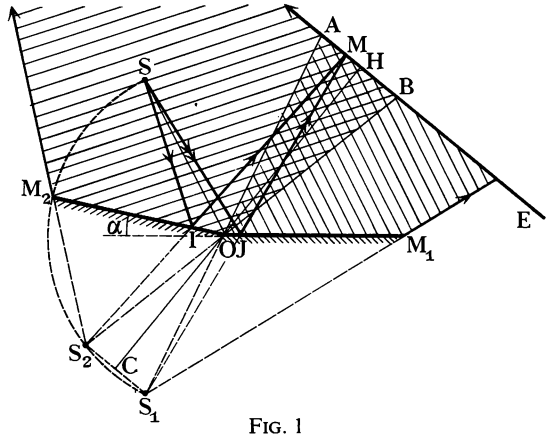


FIG. 1

Considérons un point M de l'écran situé entre A et B. Ce point reçoit la lumière issue de S, réfléchie par M_1, selon le trajet SJM, et il reçoit en même temps la lumière issue de S, réfléchie par M_2, selon le trajet SIM. Les ondes lumineuses qui se superposent en M ont subi, l'une et l'autre, une réflexion sur le verre. Leur différence de marche se réduit donc à la différence des trajets qu'elles parcourent dans l'air. Cette différence de marche est ici

$$\delta = SJ + JM - (SI + IM).$$

Mais les images S_1 et S_2 sont respectivement symétriques de S par rapport à M_1 et M_2; donc $SJ = S_1J$ et $SI = S_2I$. La différence de marche s'écrit

$$\delta = S_1J + JM - (S_2I + IM) = S_1M - S_2M.$$

Tout se passe donc comme si nous avions, en S_1 et S_2, deux sources identiques à S, c'est-à-dire synchrones et en phase.

Le point M est éclairé si les ondes issues de S_1 et S_2 y arrivent en phase, c'est-à-dire si la différence de marche δ est égale à un nombre entier de longueurs d'ondes :

$$S_1M - S_2M = k\lambda. \tag{1}$$

Le point M est obscur si les ondes y parviennent en opposition de phase, donc si δ est égale à un nombre impair de demi-longueurs d'ondes :

$$S_1M - S_2M = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}. \tag{2}$$

Les relations (1) et (2) définissent des hyperboloïdes de révolution de foyers S_1 et S_2 dont les nappes, de courbure très faible, coupent l'écran selon des courbes pratiquement rectilignes. Ces courbes apparaissent, sur un écran de faible étendue, comme de petits segments de droites parallèles, perpendiculaires au plan de la figure 1, alternativement brillants et obscurs. Ces segments constituent les franges d'interférences.

Soit COH la trace, sur la figure 1, du plan médiateur du segment S_1S_2. Tous les points de la frange de trace H sont dans ce plan médiateur, donc équidistants de S_1 et S_2. En tout point de cette frange, la différence de marche est nulle. C'est la frange centrale, ou frange d'ordre zéro, qui est ici une frange brillante.

Calcul de l'interfrange. — L'interfrange *i* est la distance qui sépare, sur l'écran, les centres de deux franges consécutives de même nature.

Sur la trace AB de l'écran E déterminons la position d'un point M par son abscisse *x* relativement à l'axe Hx, dont le sens positif est le sens du vecteur $\overrightarrow{S_1S_2}$, (*fig.* 2).

Soit S_2K l'arc de cercle de centre M qui rencontre S_1M au point K.

La distance CH est de l'ordre du mètre tandis que la distance S_1S_2 est de l'ordre du millimètre. L'arc S_2K est très voisin du segment de droite S_2K et la figure S_1S_2K peut être considérée comme un triangle rectangle en K, d'angle aigu $\widehat{S_1S_2K} \approx \widehat{HCM} = \alpha$.

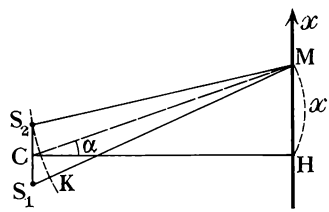


FIG. 2

Nous pouvons écrire les relations

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{HM}{CH}, \qquad \sin\alpha = \frac{S_1K}{S_1S_2}.$$

L'angle α est très petit, car la distance *x*, inférieure à HA, est de l'ordre du millimètre; donc $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha$, et nous pouvons écrire

$$\frac{S_1K}{S_1S_2} = \frac{HM}{CH}.$$

Or, S_1K est la différence de marche $\delta = S_1M - S_2M$; S_1S_2 est la distance séparant les deux sources et CH est la distance D des sources à l'écran. Il vient donc

$$\frac{\delta}{S_1S_2} = \frac{x}{D}, \qquad \text{soit} \qquad x = \delta \frac{D}{S_1S_2}.$$

L'abscisse de la frange brillante d'ordre k, c'est-à-dire de différence de marche $\delta = k\lambda$, est

$$x_k = k\lambda \frac{D}{S_1S_2}.$$

Pour la frange brillante d'ordre $k + 1$, il vient

$$x_{k+1} = (k + 1)\lambda \frac{D}{S_1S_2}.$$

L'interfrange est donc

$$i = x_{k+1} - x_k = \lambda \frac{D}{S_1S_2}.$$

Les points S, S_1 et S_2 sont sur le cercle de centre O et de rayon d_1. Le rayon SO se réfléchit dans la direction S_1OA sur M_1 et dans la direction S_2OB sur M_2. Le rayon réfléchi OA coïnciderait avec OB si le miroir M_1 tournait de l'angle α pour se placer dans le plan de M_2; donc l'angle $\widehat{AOB}$ est le double de l'angle α et nous pouvons écrire $\widehat{S_1OS_2} = 2\alpha$.

La longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{S_1S_2}$ est $\overset{\frown}{S_1S_2} = 2d_1\alpha$, et, l'angle α étant très petit, la longueur de l'arc est très voisine de celle de la corde S_1S_2, donc

$$S_1S_2 \approx 2d_1\alpha.$$

De même, la hauteur CO du triangle isocèle OS_1S_2 est très voisine du côté OS_1, et $CO \approx d_1$. Nous pouvons écrire $D = CO + OH \approx d_1 + d_2$.

L'expression de l'interfrange devient

$$i = \frac{\lambda(d_1 + d_2)}{2\alpha d_1}.$$

Avec $d_1 = 0{,}5$ m, $d_2 = 2$ m, $\alpha = 2{,}5.10^{-3}$ rd et $\lambda = 0{,}55$ µm $= 5{,}5.10^{-7}$ m, il vient

$$i = \frac{5{,}5.10^{-7} \times 2{,}5}{2 \times 2{,}5.10^{-3} \times 0{,}5} = 5{,}5.10^{-4} \text{ m, ou } 0{,}55 \text{ mm}.$$

***b)* Remplacement de la source ponctuelle par une fente.** — On remplace la source S par une fente très fine perpendiculaire au plan de la figure 1. Chaque point de la fente donne sur l'écran son propre système de franges, normales au plan de la figure. Tous les systèmes possèdent le même interfrange et toutes les franges centrales ont la même trace H. Il en résulte que toutes les franges brillantes se superposent exactement d'une part, ainsi que les franges obscures d'autre part. On obtient donc des franges identiques à celles que l'on obtient avec une source ponctuelle, mais le contraste est plus grand entre les franges brillantes et obscures.

c) **Variation de l'éclairement en fonction de x.** — Soit a l'amplitude de la vibration lumineuse de la source S. Le miroir M_1 donne une source fictive d'amplitude $R_1 a$, et le miroir M_2 une source fictive d'amplitude $R_2 a$, ces deux sources étant synchrones et en phase. Leurs états à l'instant t sont définis par les expressions

$$\varepsilon_{S_1}(t) = R_1 a \sin \omega t; \qquad \varepsilon_{S_2}(t) = R_2 a \sin \omega t.$$

Soit c la vitesse de propagation de la lumière dans le vide, et pratiquement dans l'air. La vibration qui arrive en M à l'instant t, venant de S_1, est celle qui était en S_1 à l'instant $t - \dfrac{S_1M}{c} = t - \dfrac{l_1}{c}$, en posant $S_1M = l_1$. L'expression de cette vibration est

$$\varepsilon_{1M}(t) = R_1 a \sin\left(\omega t - \frac{\omega l_1}{c}\right).$$

En posant $l_2 = S_2M$, l'expression de la vibration qui, venant de S_2, arrive en M à l'instant t, est

$$\varepsilon_{2M}(t) = R_2 a \sin\left(\omega t - \frac{\omega l_2}{c}\right).$$

La vibration résultante $\varepsilon_M(t) = \varepsilon_{1M}(t) + \varepsilon_{2M}(t)$ est obtenue par la construction de Fresnel :

$\varepsilon_{1M}(t)$ est la projection sur l'axe Oε du vecteur $\overrightarrow{OA}$, de module $R_1 a$, formant avec l'axe Oρ l'angle $\theta_1 = \omega t - \dfrac{\omega l_1}{c}$.

$\varepsilon_{2M}(t)$ est la projection sur Oε du vecteur $\overrightarrow{OB}$ de module $R_2 a$, formant avec Oρ l'angle

$$\theta_2 = \omega t - \frac{\omega l_2}{c}.$$

$\varepsilon_M(t)$ est la projection sur Oε de la résultante $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

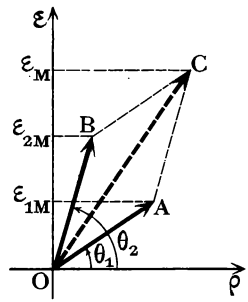


FIG. 3

L'angle $(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}) = \theta_2 - \theta_1 = \dfrac{\omega(l_1 - l_2)}{c}$ est constant ; donc le parallélogramme OACB tourne sans se déformer autour de O avec la vitesse angulaire ω. L'expression de la vibration résultante est donc

$$\varepsilon_M(t) = OC \sin(\omega t + \psi)$$

et son amplitude est égale au module $\mathscr{A}_M = OC$ du vecteur $\overrightarrow{OC}$.

Le carré de cette amplitude est donc

$$\mathscr{A}_M^2 = OC^2 = OA^2 + OB^2 + 2OA.OB \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}),$$

c'est-à-dire

$$\mathscr{A}_M^2 = a^2\left[R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2 \cos\frac{\omega(l_1 - l_2)}{c}\right].$$

Nous avons $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi N}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ et $l_1 - l_2$ est la différence de marche

$$\delta = \frac{x.\overline{S_1S_2}}{D} = \frac{2d_1\alpha x}{d_1 + d_2}.$$

En introduisant l'interfrange $i = \frac{\lambda(d_1 + d_2)}{2d_1\alpha}$, nous avons $\frac{2d_1\alpha}{d_1 + d_2} = \frac{\lambda}{i}$. Finalement, il vient

$$\frac{\omega(l_1 - l_2)}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{x\lambda}{i} = 2\pi\frac{x}{i}.$$

L'expression de l'éclairement E, proportionnel à $\mathscr{A}_M^2$, s'écrit donc

$$E = K\mathscr{A}_M^2 = Ka^2\left[R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2\cos\left(2\pi\frac{x}{i}\right)\right].$$

En particulier, si les deux miroirs sont identiques, nous avons $R_1 = R_2 = R$ et

$$E = Ka^2R^2\left[2 + 2\cos\left(2\pi\frac{x}{i}\right)\right],$$

soit

$$E = 4Ka^2R^2\cos^2\left(\pi\frac{x}{i}\right).$$

L'éclairement varie donc en fonction de x comme la fonction $\cos^2\left(\pi\frac{x}{i}\right)$. Il est maximal pour

$$\cos^2\left(\pi\frac{x}{i}\right) = 1,$$

soit $\pi\frac{x}{i} = k\pi$, ou $x = ki$, avec k entier. Il est nul pour $\cos^2\left(\pi\frac{x}{i}\right) = 0$, soit $\pi\frac{x}{i} = k\pi + \frac{\pi}{2}$, soit encore $x = ki + \frac{i}{2}$.

La figure 4 représente les variations de E en fonction de x.

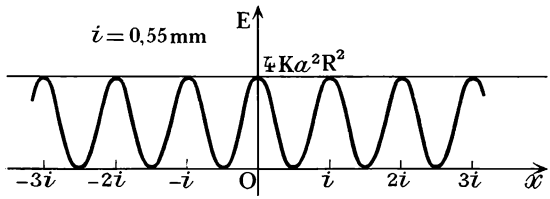


FIG. 4

d) **Si les deux miroirs ne sont pas identiques,** nous devons conserver l'expression

$$E = Ka^2\left[R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2\cos\left(2\pi\frac{x}{i}\right)\right]$$

qui varie entre la valeur maximale

$$E_M = Ka^2(R_1 + R_2)^2$$

pour $\cos\left(2\pi\frac{x}{i}\right) = 1$, soit $2\pi\frac{x}{i} = 2k\pi$, ou $x = ki$, et la valeur minimale

$$E_m = Ka^2(R_1 - R_2)^2$$

pour $\cos\left(2\pi\frac{x}{i}\right) = -1$, soit $2\pi\frac{x}{i} = (2k+1)\pi$, ou $x = ki + \frac{i}{2}$.

La figure 5 représente l'éclairement de l'écran en fonction de x.

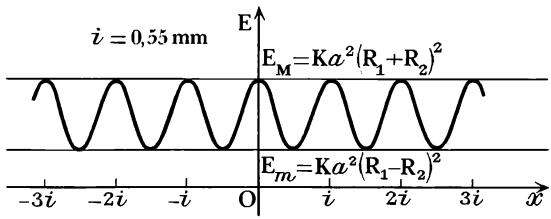


FIG. 5

Nous voyons que les franges sombres ne sont plus obscures, l'éclairement minimal E_{min} étant supérieur à 0. Il y a donc avantage à réaliser l'expérience avec des miroirs identiques.

2° Superposition des deux systèmes de franges. — La radiation $\lambda = 0{,}55$ µm donne un système d'interfrange

$$i = 0{,}55 \text{ mm},$$

et la radiation $\lambda' = 0{,}44$ µm donne un système d'interfrange

$$i' = \frac{\lambda'(d_1 + d_2)}{2d_1\alpha} = 0{,}44 \text{ mm}.$$

Les franges centrales sont superposées. De part et d'autre de la frange centrale, les franges se brouillent, leurs franges obscures ne coïncident pas.

Une coïncidence se produit en tout point M dont la distance à la frange centrale est un multiple entier de chacun des deux interfranges. Si n et n' sont deux entiers, nous avons, lors d'une coïncidence,

$$x = ni = n'i',$$

donc

$$\frac{n'}{n} = \frac{i}{i'} = \frac{0{,}55}{0{,}44} = \frac{5}{4}.$$

La première coïncidence correspond aux plus petites valeurs possibles de n et n' satisfaisant à la relation précédente. La fraction $\frac{n'}{n}$ doit donc être irréductible, les nombres entiers n et n' étant premiers entre eux. C'est le cas des nombres $n = 4$ et $n' = 5$ et la première coïncidence se produit à l'abscisse

$$x = 4i = 4 \times 0{,}55 = 2{,}20 \text{ mm}.$$

3° Étude spectroscopique de la lumière à la distance $x = 3{,}3$ mm de la frange centrale. – A cette distance, la différence de marche est

$$\delta = \frac{S_1S_2x}{D} = \frac{2d_1\alpha x}{d_1 + d_2} = \frac{2 \times 0{,}5 \times 2{,}5.10^{-3} \times 3{,}3.10^{-3}}{2{,}5} = 3{,}3.10^{-6}\ \text{m},$$

ou 3,3 μm.

Pour la radiation λ, l'ordre d'interférences est

$$p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{3{,}3}{0{,}55} = 6.$$

Cet ordre est entier donc la radiation λ présente un maximum de lumière sur la fente du spectroscope.

Pour la radiation λ′, l'ordre est

$$p' = \frac{\delta}{\lambda'} = \frac{0{,}33}{0{,}44} = 7{,}5.$$

L'ordre est demi-entier. La différence de marche est un nombre impair de demi-longueurs d'ondes et la radiation λ′ passe par un minimum.

Si les deux miroirs sont identiques, la radiation λ′ est éteinte sur la fente du spectroscope. Le spectre obtenu présente une seule raie verte correspondant à

$$\lambda = 0{,}55\ \mu\text{m}.$$

Si les miroirs ont des pouvoirs réflecteurs différents, la radiation λ′ est minimale, mais non totalement éteinte. Elle donne une raie de faible intensité dans l'indigo, tandis que la radiation λ donne une raie verte très brillante.

4° *a*) La cellule émettra-t-elle des électrons ? – Nous supposerons que les deux miroirs sont identiques et que la cellule reçoit seulement la radiation $\lambda = 0{,}55$ μm.

Soit $\nu = \frac{c}{\lambda}$ la fréquence d'un photon de cette radiation. L'énergie de ce photon est $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$, soit, *numériquement*,

$$E = \frac{6{,}62.10^{-34} \times 3.10^{8}}{5{,}5.10^{-7}} = 3{,}61.10^{-19}\ \text{J}.$$

Pour le césium, l'énergie d'extraction d'un électron est

$$W_e = 1{,}8\ \text{eV} = 1{,}8 \times 1{,}6.10^{-19} = 2{,}88.10^{-19}\ \text{J}.$$

L'énergie d'un photon incident étant supérieure à l'énergie d'extraction, l'effet photo-électrique se produit et la cellule émet des électrons.

***b*) Énergie cinétique maximale des électrons émis.** – L'énergie cinétique d'un électron émis provient de l'énergie initiale apportée par le photon. Elle est donc au plus égale à la différence $E - W_e$. L'énergie cinétique maximale est donc

$$E_{Cmax} = E - W_e = (3{,}61 - 2{,}88)\ 10^{-19}\ \text{J} = 0{,}73.10^{-19}\ \text{J}.$$

c) **Potentiel d'arrêt.** — Soit U_C et U_A les potentiels de la cathode et de l'anode. Tout électron qui traverse la cellule de la cathode vers l'anode reçoit le travail

$$W = (-e)(U_C - U_A) = e(U_A - U_C).$$

Si l'électron est émis par la cathode avec l'énergie cinétique E_0, il atteint l'anode avec une énergie cinétique

$$E_1 = E_0 + W.$$

L'énergie cinétique est nécessairement positive. Si le travail W est négatif (résistant), et de valeur absolue supérieure à E_0, l'électron n'atteint pas l'anode. Il s'arrête avant d'atteindre cette électrode et retombe sur la cathode.

Si $W = -E_0$, nous avons le cas limite où l'électron parvient à l'anode avec une vitesse qui s'annule à l'instant du contact.

Le travail juste nécessaire pour obtenir ce cas limite avec les électrons les plus rapides, d'énergie initiale $E_0 = E_{Cmax}$, est donc $W_l = -E_{Cmax}$. Dans ce cas, tous les électrons sont arrêtés avant d'atteindre l'anode, sauf les plus rapides qui l'atteignent avec une vitesse nulle.

Dans ce cas,

$$W_l = e(U_A - U_C) = -E_{Cmax},$$

donc

$$U_A - U_C = -\frac{E_{Cmax}}{e} = -\frac{0{,}73.10^{-19}}{1{,}6.10^{-19}} = -0{,}456 \text{ V}.$$

Pour annuler totalement le courant photo-électrique, il faut établir la cathode à un potentiel supérieur à celui de l'anode, d'une quantité $U_C - U_A$ supérieure à 0,456 V.

F. – Molécules, atomes et noyaux

(Absorption et émission de photons, radioactivité)

31

1. – Centre de gravité et moment d'inertie.
2. – Principes fondamentaux de la dynamique.
3. – Énergie mécanique d'un oscillateur et d'un rotateur.
4. – Quantum d'énergie : $E = h\nu$.

A) On considère deux points matériels M_1 et M_2 ayant respectivement pour masses m_1 et m_2, reliés rigidement par une liaison sans masse de longueur $|r|$. Le centre de gravité G de cet ensemble est fixe et le système peut tourner sans frottement dans le plan de la figure (xGy) autour d'un axe Gz passant par G et perpendiculaire à ce plan (*fig.* 1). On rappelle que le centre de gravité G est tel que $m_1 r_1 + m_2 r_2 = 0$, avec $r_1 = \overline{GM_1}$ et $r_2 = \overline{GM_2}$.

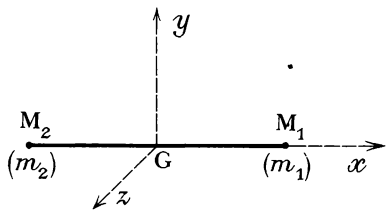


FIG. 1

1° Exprimer le moment d'inertie J de ce système par rapport à l'axe Gz. Montrer qu'il peut être mis sous la forme $J = \mu r^2$, où μ, appelée masse réduite du système, a pour valeur.

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Exprimer l'énergie cinétique de rotation E_R de ce système en fonction de μ, $|r|$ et N_R, fréquence de rotation; préciser les unités.

2° On peut assimiler la molécule isolée H – Cl au système mécanique précédent.

Soumise à l'action de radiations électromagnétiques appropriées, elle acquiert un mouvement de rotation dont l'énergie cinétique a pour valeur (dans le cas où l'on n'envisage que la rotation autour de Gz)

$$E_R = \frac{h\nu_R}{2},$$

où ν_R, fréquence de la radiation absorbée, est égale à la fréquence propre de rotation N_R de la molécule.

Calculer la distance interatomique, r, de la molécule $^1H - {}^{35}Cl$ pour $\nu_R = 6{,}2.10^{11}$ hertz. On donne

$$h \text{ (constante de Planck)} = 6{,}62.10^{-34} \text{ J.s},$$
$$1 \text{ u.m.a.} = 1{,}66.10^{-27} \text{ kg}, \quad 1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}.$$

B) Dans la molécule de HCl les atomes ne sont, en fait, pas rigidement liés; la liaison interatomique présentant une certaine élasticité, on assimile maintenant la molécule HCl au système mécanique constitué par deux points matériels M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2, reliés par un ressort sans masse, de longueur $|r|$ au repos (alors $\overline{GM_1} = r_1$, $\overline{GM_2} = r_2$).

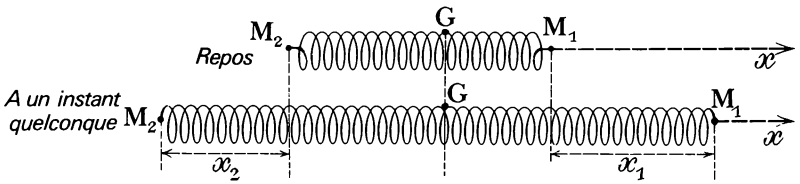


FIG. 2

L'allongement du ressort, de raideur k, est donné par $x_1 - x_2$, où x_1 et x_2 sont les accroissements algébriques de r_1 et r_2 (voir figure 2); G est supposé fixe et la rotation n'est plus à considérer.

1° Exprimer la force de rappel exercée par le ressort sur M_1.

2° Écrire l'équation du mouvement de M_1 dont la position sera définie par x_1.

3° Éliminer la variable x_2 de cette équation en utilisant la propriété du centre de gravité. Montrer qu'alors le mouvement de M_1 est identique à celui d'un point matériel de masse

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

sollicité par un ressort de raideur k. Exprimer la fréquence N_v d'oscillation de M_1.

Constater par analogie que le point M_2 est lui aussi animé d'un mouvement vibratoire de même nature que celui du point M_1 et qu'en particulier leurs fréquences sont égales.

4° Le système vibrant a même énergie mécanique totale que l'oscillateur équivalent constitué par la masse μ et le ressort de raideur k. Exprimer cette énergie, appelée énergie de vibration E_v, en fonction de μ, N_v et de l'amplitude a des oscillations.

5° Comme dans le cas de la rotation, l'énergie de vibration E_v est fournie à la molécule par absorption de radiations électromagnétiques de fréquence ν_v égale à la fréquence propre de vibration N_v de la molécule; soit $E_v = h\nu_v$.

Pour $\nu_v = 8{,}65.10^{13}$ hertz, calculer l'amplitude a des oscillations d'une molécule $^1H - {}^{35}Cl$.

N.B. – Les deux parties du problème sont indépendantes.

(Bacc. C et E Montpellier, juin 1972.)

A) 1° Expression du moment d'inertie du système. – Le moment d'inertie du système est

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2.$$

Son centre de gravité est défini par la relation

(1) $$m_1 r_1 + m_2 r_2 = 0.$$

Posons

(2) $$\overline{M_2M_1} = r_1 - r_2 = r,$$

et résolvons le système des équations (1) et (2) de manière à exprimer les racines r_1 et r_2 en fonction de m_1, m_2 et r. Il vient

$$r_1 = \frac{m_2 r}{m_1 + m_2} \qquad \text{et} \qquad r_2 = -\frac{m_1 r}{m_1 + m_2},$$

Portons ces valeurs dans l'expression de J. Il vient

$$J = \frac{m_1 m_2^2 r^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_2 m_1^2 r^2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2) r^2}{(m_1 + m_2)^2},$$

soit

$$J = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 = \mu r^2.$$

Énergie cinétique du système. — Le système, dont la fréquence de rotation est N_R, possède une vitesse angulaire $\omega = 2\pi N_R$, avec N_R exprimée en hertz et ω en radians par seconde.

L'énergie cinétique, exprimée en joules si l'unité de longueur est le mètre et l'unité de masse le kilogramme, est

$$E_R = \frac{1}{2} J\omega^2 = \frac{1}{2} \mu r^2 \times 4\pi^2 N_R^2 = 2\pi^2 \mu r^2 N_R^2.$$

2° Distance interatomique de la molécule $^1H^{-35}Cl$. — La masse réduite de cette molécule, exprimée en u.m.a., est

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{1 \times 35}{1 + 35} = \frac{35}{36} \text{ u.m.a.}$$

Exprimée en kilogrammes, cette masse devient

$$\mu = \frac{35 \times 1{,}66}{36} . 10^{-27} \text{ kg.}$$

Connaissant l'énergie cinétique $E_R = \frac{h\nu_R}{2}$, nous pouvons calculer la distance interatomique r :

$$2\pi^2 \mu r^2 N_R^2 = \frac{h\nu_R}{2}, \qquad \text{avec} \qquad N_R = \nu_R.$$

Nous obtenons

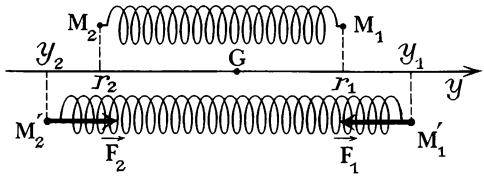
$$r = \sqrt{\frac{h}{4\pi^2 \mu \nu_R}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{h}{\mu \nu_R}}.$$

Numériquement, il vient

$$r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{6{,}62.10^{-34} \times 36}{35 \times 1{,}66.10^{-27} \times 6{,}2.10^{11}}} = 1{,}29.10^{-10} \text{ m}, \qquad \text{soit} \qquad r = 1{,}29 \text{ Å}.$$

B) 1° Force de rappel exercée par le ressort sur M_1. — Soit M_1, M_2 les extrémités du ressort au repos, et M'_1, M'_2 les extrémités du ressort tendu. Le ressort tendu exerce sur les points M'_1 et M'_2 des forces opposées de même module

$$F = F_1 - F_2 = |k(\overline{M'_2M'_1} - \overline{M_2M_1})|.$$



Algébriquement, nous avons

$$\overline{M'_2M'_1} = \overline{GM'_1} - \overline{GM'_2} = y_1 - y_2,$$
$$\overline{M_2M_1} = \overline{GM_1} - \overline{GM_2} = r_1 - r_2,$$

donc

$$\overline{M'_2M'_1} - \overline{M_2M_1} = y_1 - r_1 - (y_2 - r_2).$$

En posant $x_1 = y_1 - r_1$ et $x_2 = y_2 - r_2$, il vient

$$F = |k(x_1 - x_2)|.$$

Si le ressort est tendu, l'allongement $x_1 - x_2$ est positif et la projection sur l'axe Oy de $\vec{F}_1$ est négative. Au contraire, si le ressort est comprimé, $x_2 - x_1$ est négatif tandis que la projection $\bar{F}_1$ de $\vec{F}_1$ est positive. Nous devons donc écrire

$$\bar{F} = - k(x_1 - x_2).$$

2° Équation du mouvement de M_1. — En projection sur l'axe Gy, l'accélération de M_1 est $\gamma_1 = \dfrac{d^2y_1}{dt^2}$. Mais $y_1 = r_1 + x_1$, et r_1 est une constante. Nous pouvons donc écrire $\gamma_1 = \dfrac{d^2x_1}{dt^2}$, ce qui revient à considérer le point M_1 d'abscisse r_1 comme nouvelle origine de l'axe. Les principes fondamentaux de la Dynamique permettent d'écrire l'équation

$$m_1\gamma_1 = m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = - k(x_1 - x_2).$$

3° Élimination de x_2, mouvement de la particule relative. — Par définition, le centre de gravité vérifie toujours la relation $m_1\overline{GM_1} + m_2\overline{GM_2} = 0$.

Au repos, nous avons

(1) $$m_1r_1 + m_2r_2 = 0.$$

Au cours du mouvement, il vient

(2) $$m_1y_1 + m_2y_2 = 0.$$

Par soustraction membre à membre, nous obtenons

$$m_1(y_1 - r_1) + m_2(y_2 - r_2) = 0,$$

soit

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0.$$

Cette relation permet d'exprimer x_2 en fonction de x_1 :

$$x_2 = -\frac{m_1}{m_2} x_1.$$

Portons cette valeur dans l'expression de γ_1. Il vient

$$m_1\gamma_1 = -kx_1\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right),$$

soit

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\gamma_1 = \mu\gamma_1 = -kx_1. \tag{3}$$

L'équation (3) est celle du mouvement d'un point matériel de masse $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ sollicité par un ressort de raideur k. Ce point matériel effectue un mouvement sinusoïdal

$$x_1 = a \sin(\omega t + \varphi)$$

de pulsation $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{\mu}}$, de période $T_V = 2\pi\sqrt{\dfrac{\mu}{k}}$, donc de fréquence

$$N_V = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}}.$$

La relation $x_2 = -\dfrac{m_1}{m_2} x_1$ montre que le point M_2 effectue, autour du centre d'abscisse r_2, un mouvement sinusoïdal

$$x_2 = -\frac{m_1}{m_2} a \sin(\omega t + \varphi)$$

de même fréquence que le mouvement de M_1.

4° Énergie mécanique totale de l'oscillateur. — Lorsque la masse relative μ passe par sa position d'équilibre $x_1 = 0$, l'énergie potentielle est nulle et l'énergie du système est totalement cinétique.

La vitesse de la masse μ à l'instant t est

$$v_1 = \omega a \cos(\omega t + \varphi).$$

Lorsque cette masse passe par la position d'équilibre, nous avons

$$x_1 = a \sin(\omega t + \varphi) = 0,$$

donc

$$\sin(\omega t + \varphi) = p\pi \qquad (p \text{ entier})$$

et

$$\cos(\omega t + \varphi) = (-1)^p.$$

La vitesse de la masse μ est alors $V = (-1)^p \omega a$, et son énergie cinétique, égale à cet instant à l'énergie mécanique totale, prend la valeur

$$E_V = \frac{1}{2}\mu V^2 = \frac{\mu\omega^2 a^2}{2}.$$

Avec $\omega = 2\pi N_V$, l'expression de l'énergie devient

$$E_V = 2\pi^2 \mu N_V^2 a^2.$$

5° Calcul de l'amplitude des oscillations. – Connaissant la valeur $E_V = h\nu_V$ de l'énergie et, compte tenu de l'égalité des fréquences ($N_V = \nu_V$), il vient

$$h = 2\pi^2 \mu \nu_V a^2.$$

L'amplitude des oscillations est donc

$$a = \sqrt{\frac{h}{2\pi^2 \mu \nu_V}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{h}{2\mu\nu_V}}.$$

Numériquement, nous avons

$$a = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{6{,}62.10^{-34} \times 36}{2 \times 35 \times 1{,}66.10^{-27} \times 8{,}65.10^{13}}} = 1{,}55.10^{-11} \text{ m},$$

soit

$$a = 0{,}155 \text{ Å}.$$

32

1. – Loi de Coulomb $F = k \frac{qq'}{r^2}$.

2. – Energie cinétique.

3. – Énergie potentielle coulombienne.

4. – Énergie mécanique totale.

5. – Modèle d'atome de Bohr.

6. – *Condition optique du quantum :*

$$h\nu = W_1 - W_2.$$

Ce problème étudie le modèle d'atome d'hydrogène proposé par Rutherford et amélioré par Bohr.

On considère l'atome d'hydrogène comme constitué d'un proton de charge $+ e$ dans le champ électrique duquel gravite un électron de charge e, de masse m, sur une trajectoire circulaire de rayon r, avec une vitesse de module constant v.

On admet la loi de Coulomb : les forces exercées l'une sur l'autre par deux charges ponctuelles sont opposées, d'égale intensité, dirigées suivant la droite qui les joint, attractives si elles sont de signes contraires et

$$F = F' = k \frac{|q| \cdot |q'|}{r^2}, \qquad \text{avec} \qquad k = 9.10^9 \text{ SI}.$$

On néglige les actions sur l'électron de masse m des champs de gravitation de la Terre et du proton.

Le système électron-proton possède de l'énergie : énergie cinétique de l'électron, énergie potentielle électrostatique correspondant à la position de l'électron à un instant donné par rapport au proton. Nous nous proposons de déterminer cette énergie et d'étudier les échanges d'énergie de l'atome avec le milieu extérieur.

A) *Application des lois de la mécanique classique.*

1° Donner les caractéristiques à l'instant t de la force électrostatique $\vec{f}$ exercée par le proton sur l'électron.

2° Donner l'expression (en fonction de k, e, r) de l'énergie cinétique E_C de l'électron (supposé non relativiste).

3° *Recherche de la fonction énergie potentielle électrostatique du système.* – On admettra que lorsqu'une charge électrique se déplace dans un champ électrique, le travail de la force électrique qui s'exerce sur elle est indépendant du chemin suivi et que ce travail mesure la diminution de l'énergie potentielle du système.

a) Que dire de l'énergie potentielle V du système électron-proton lorsque r reste constant ?

b) Soit dr une petite variation algébrique donnée à r telle que l'intensité de la force électrique $\vec{f}$ puisse être considérée comme constante entre r et $r + dr$.

Donner l'expression du travail dw de la force électrique (on rappelle qu'un travail est positif s'il est moteur, négatif s'il est résistant).

En déduire l'expression de la variation dV de l'énergie potentielle électrostatique du système.

c) A partir des résultats obtenus en *b*) montrer par intégration que

$$V = -k\frac{e^2}{r} + C \qquad \text{(C étant une constante arbitraire).}$$

d) On déterminera C par la condition que l'énergie potentielle soit nulle lorsque l'électron est infiniment éloigné du noyau. Quelle est alors l'expression de l'énergie potentielle ?

e) On appellera énergie E du système constitué par l'électron en présence du proton la somme $E_C + V$ de l'énergie cinétique de l'électron et de l'énergie potentielle électrostatique Montrer que

$$E = -\frac{1}{2}k\frac{e^2}{r}.$$

Que peut-on penser du signe « moins » ?

B) *On admettra le premier postulat de Bohr.*

L'électron ne peut graviter que sur certaines orbites, dites stationnaires ou quantifiées, dont les rayons satisfont la condition

$$mvr = n\frac{h}{2\pi},$$

n étant un entier positif au moins égal à un, appelé nombre quantique principal de l'orbite de rayon *r* et *h* la constante de Planck.

1° Donner l'expression générale de *r* en fonction de *h*, *n*, *m*, *e* et de la constante *k* de la loi de Coulomb.

2° Soit r_1 la valeur de *r* correspondant à $n = 1$ (orbite K).
Calculer numériquement r_1 (l'exprimer en angström).

On donne

$$h = 6{,}625.10^{-34}\ \text{SI}, \qquad k = 9.10^9\ \text{SI},$$
$$m = 9{,}108.10^{-31}\ \text{kg}, \qquad e = 1{,}602.10^{-19}\ \text{C}.$$

3° Donner en fonction de *n* et de r_1 l'expression littérale de l'énergie correspondant à l'orbite de nombre quantique principal *n*. Faire les calculs numériques dans le cas où l'on exprime cette énergie en joules, puis dans le cas où on l'exprime en électronvolts.

4° Donner l'expression de la variation d'énergie de l'atome lorsque l'électron passe de l'orbite de rang 1 à l'orbite de rang *n*.
Quelle est l'énergie nécessaire pour ioniser l'atome d'hydrogène, c'est-à-dire pour lui arracher son unique électron qui est normalement au niveau de K ? Donner le résultat en électronvolts.

C) *On admettra le deuxième et le troisième postulat de Bohr.*

Au cours de l'évolution de l'électron sur une orbite « permise », l'atome ne rayonne pas d'énergie.
Lorsque l'électron passe de l'orbite de rang *n* à l'orbite de rang *p* ($p < n$), l'atome rayonne de l'énergie, et cette énergie est emportée par un photon d'énergie $h\nu = E(n) - E(p)$, photon auquel est associée l'onde électromagnétique de fréquence ν.

1° Donner les expressions de la fréquence et de la longueur d'onde de la radiation correspondant au photon émis.

2° Faire l'application numérique en déterminant la longueur d'onde en microns pour $n = 5$, $p = 2$.
On donne la vitesse de la lumière : $c = 3.10^8$ m/s.

(Bacc. C et E. Montpellier, juin 1974.)

A) Application des lois de la Mécanique classique.

1° Force exercée sur l'électron par le proton. — Soit P le proton et M l'électron et soit $\vec{r}$ le rayon vecteur $\overrightarrow{PM}$. Posons

$$r = \overline{PM}$$

distance mesurée sur l'axe P*r* de sens positif centrifuge.

Les charges $+ e$ et $- e$ du proton et de l'électron sont de signes contraires et les forces agissant sur les particules sont attractives. En particulier, la force $\vec{F}$ qui agit sur l'électron est centripète, de module $F = \frac{ke^2}{r^2}$, et sa projection sur l'axe radial P*r* est

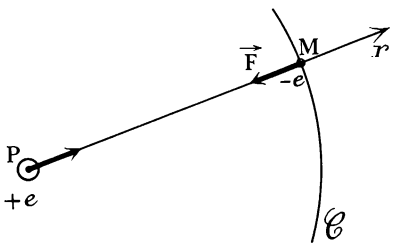


FIG. 1

$$\vec{F} = -\frac{ke^2}{r^2}.$$

$\vec{F}$ est constante puisque r est constant sur la trajectoire circulaire de centre P.

2° Énergie cinétique de l'électron. — L'électron décrit une trajectoire circulaire de rayon r avec une vitesse constante v. Son accélération est normale, centripète, de module $\gamma_n = \frac{v^2}{r}$, et, d'après le principe fondamental de la Dynamique, cette accélération est liée à la force $\vec{F}$ par la relation $\vec{F} = m\vec{\gamma}$, soit, en modules,

$$F = m\frac{v^2}{r}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{ke^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}.$$

Nous avons donc $mv^2 = \frac{ke^2}{r}$ et nous pouvons exprimer l'énergie cinétique $E_C = \frac{1}{2}mv^2$ en fonction de k, e et r :

$$E_C = \frac{ke^2}{2r}.$$

3° Énergie potentielle du système.

a) Énergie potentielle* V *si r est constant. — Lorsque M se déplace sur une sphère de centre P (r = Cte), le déplacement élémentaire $\overrightarrow{\delta M}$ est perpendiculaire à la force $\vec{F}$ et le travail élémentaire

$$\delta\omega = \vec{F} \cdot \delta\vec{M}$$

est toujours nul.

Le travail de la force électrostatique est donc nul pour tout déplacement sur une sphère de rayon r. Il en résulte que l'énergie potentielle V ne varie pas lorsque l'électron reste à distance constante r du proton.

b) Travail élémentaire de la force électrostatique. — Supposons que l'électron, initialement au point M d'abscisse r vienne, sur l'axe Pr, au point M' d'abscisse $r + dr$.

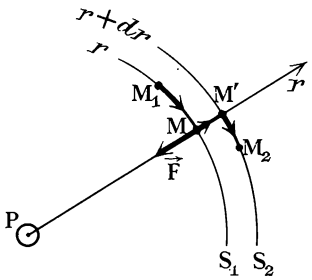


FIG. 2

La force $\vec{F}$, dont la projection sur Pr est

$$\vec{F} = -k\frac{e^2}{r^2},$$

produit le travail élémentaire

$$dW = \vec{F} \cdot MM' = -ke^2\frac{dr}{r^2}.$$

Supposons maintenant que l'électron, initialement en M_1 sur la sphère S_1 de rayon r, vienne en M_2 sur la sphère S_2 de rayon $r + dr$, par le trajet $\overset{\frown}{M_1M}$, MM', $\overset{\frown}{M'M_2}$.

Les arcs $\overset{\frown}{M_1M}$ et $\overset{\frown}{M'M_2}$ sont parcourus sur des sphères de centre P; donc les travaux correspondants de la force $\vec{F}$ sont nuls. Il en résulte que le travail élémentaire de $\vec{F}$, pour le déplacement $M_1MM'M_2$ est encore $dW = -ke^2\frac{dr}{r^2}$.

En admettant par hypothèse que le travail de la force électrostatique ne dépend pas du chemin suivi, mais seulement des extrémités de ce chemin, nous devons considérer que le travail de cette force entre la position initiale M_1 (rayon r) et la position finale M_2 (rayon $r + dr$) est toujours

$$dW = -ke^2\frac{dr}{r^2}.$$

Par « diminution » de l'énergie potentielle, nous entendrons la différence : $V_{\text{initiale}} - V_{\text{finale}}$.

Considérons un électron situé initialement sur la sphère S_1 de rayon r, où le potentiel est V, et qui passe finalement en un point de la sphère S_2, de rayon $r + dr$, où le potentiel est $V + dV$. Nous avons ici

$$V_{(\text{initial})} - (V + dV)_{(\text{final})} = dW = -ke^2\frac{dr}{r^2}.$$

La variation de l'énergie potentielle électrostatique est donc

$$dV = \frac{ke^2\,dr}{r^2}.$$

c) Expression de l'énergie potentielle. — La relation

$$\frac{dV}{dr} = \frac{ke^2}{r^2}$$

montre que l'énergie potentielle est une primitive de la fonction

$$\frac{ke^2}{r^2} = ke^2 r^{-2}.$$

Nous obtenons

$$V = ke^2 \frac{r^{-1}}{-1} + C,$$

soit

$$V = -k\frac{e^2}{r} + C.$$

d) ***Choix de*** **C.** — On choisit C de manière que $V = 0$ si $r \to \infty$. Or, si $r \to \infty$, $k\frac{e^2}{r} \to 0$ et il reste la condition $V_\infty = 0 = C$.

L'expression de l'énergie potentielle est donc

$$V = -k\frac{e^2}{r}.$$

e) ***Énergie totale.*** — C'est la somme

$$E = E_C + V = \frac{ke^2}{2r} - \frac{ke^2}{r},$$

soit $E = -\frac{ke^2}{2r}$.

Le fait que l'énergie totale soit négative est lié au choix de la constante C de l'énergie potentielle. En laissant indéterminée cette constante, nous aurions

$$E = C - \frac{ke^2}{2r}.$$

Si nous nous proposons d'évaluer la *différence* entre deux valeurs E_1 et E_2 de l'énergie du système, nous obtenons

$$E_2 - E_1 = \frac{ke^2}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

et cette différence ne dépend pas de C, qu'il est donc plus simple de prendre nulle *a priori*.

B) Application du premier postulat de Bohr.

1° Rayons des orbites stationnaires. — Les rayons de ces orbites satisfont la condition mécanique du quantum

$$mvr = n\frac{h}{2\pi}; \quad n \text{ entier} \geqslant 1.$$

Or, nous avons vu que, sur une orbite quelconque, le principe fondamental de la dynamique donne entre v et r la relation $mv^2 = \frac{ke^2}{r}$, donc

$$m^2v^2 = \frac{kme^2}{r},$$

et, d'après le premier postulat de Bohr,

$$m^2v^2 = \frac{n^2h^2}{4\pi^2r^2}.$$

En égalant les seconds membres de ces deux relations, il vient

$$r = \frac{n^2h^2}{4\pi^2kme^2}.$$

2° Calcul du rayon r_1 de l'orbite K. — Avec $n = 1$; $h = 6{,}625.10^{-34}$ J.s; $k = 9.10^9$ SI; $m = 9{,}108.10^{-31}$ kg; $e = 1{,}602.10^{-19}$ C,

il vient

$$r_1 = \frac{(6{,}625.10^{-34})^2}{4\pi^2 \times 9.10^9 \times 9{,}108.10^{-31} \times (1{,}602.10^{-19})^2},$$

soit

$$r_1 = 5{,}285.10^{-11} \text{ m}, \quad \text{ou} \quad 0{,}528\,5 \text{ Å}.$$

3° Énergie E_n sur l'orbite stationnaire de rang n. — Sur cette orbite,

$$r_n = \frac{n^2h^2}{4\pi^2kme^2}$$

et l'énergie est

$$E_n = -\frac{ke^2}{2r_n}.$$

Nous obtenons donc l'expression

$$E_n = -\frac{2\pi^2mk^2e^4}{h^2} \cdot \frac{1}{n^2},$$

où $n = 1, 2, 3, \ldots$

Numériquement, nous avons, pour $n = 1$,

$$E_1 = -\frac{2\pi^2mk^2e^4}{h^2},$$

soit

$$E_1 = \frac{-2\pi^2 \times 9{,}108.10^{-31} \times (9.10^9)^2 \times (1{,}602.10^{-19})^4}{(6{,}625.10^{-34})^2},$$

soit

$$E_1 = -2{,}185.10^{-18} \text{ joule}.$$

Nous savons que 1 électronvolt = e joule; donc, la valeur de E_1 en électronvolts est

$$E_1 = -\frac{2{,}185.10^{-18}}{1{,}602.10^{-19}} = -13{,}64 \text{ eV}.$$

Sur l'orbite de rang n, l'énergie de l'électron est donc

$$E_n = -\frac{2{,}185.10^{-18}}{n^2} \text{ (joule)},$$

$$E_n = -\frac{13{,}64}{n^2} \text{ (électronvolt)}.$$

4° Variation d'énergie lorsque l'électron passe de l'orbite 1 à l'orbite n. Cette variation est

$$E_n - E_1 = 2{,}185.10^{-18}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

en joules, ou bien

$$E_n - E_1 = 13{,}64\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

en électronvolts.

L'expression $r_n = \frac{h^2}{4\pi^2 kme^2} n^2$ montre que les rayons des orbites stationnaires croissent comme n^2. Pour ioniser l'atome, il faut séparer l'électron du proton, ce qui revient à donner à r une valeur infinie, donc à faire tendre n vers l'infini.

L'énergie de l'atome s'accroît alors de

$$E_\infty - E_1 = 13{,}64 \text{ eV}.$$

C'est l'énergie qu'il faut fournir à l'atome (par exemple à l'occasion d'un choc, ou bien en rompant sa liaison par un champ électrique intense) pour obtenir son ionisation.

C) Application des second et troisième postulats de Bohr.

1° Fréquence et longueur d'onde du photon émis. — Lorsque l'électron revient de l'orbite de rang n sur l'orbite de rang p ($p < n$), l'atome perd l'énergie mécanique

$$E_n - E_p = -2{,}185.10^{-18}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right),$$

soit

$$E_n - E_p = 2{,}185.10^{-18}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Cette énergie est emportée par un photon de fréquence ν. Nous avons donc

$$h\nu = 2{,}185.10^{-18}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

soit, avec $h = 6{,}625.10^{-34}$,

$$\nu = \frac{2{,}185.10^{-18}}{6{,}625.10^{-34}}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

$$\nu = 3{,}298.10^{15}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

La longueur d'onde de ce photon est

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3.10^8}{3{,}298.10^{15}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2}\right)},$$

soit

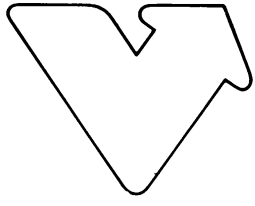
$$\lambda = 9{,}096.10^{-8}\,\frac{n^2p^2}{n^2 - p^2}.$$

2° Application numérique. — Avec $n = 5$ et $p = 2$, nous avons

$$\lambda_{5\to 2} = 9{,}096.10^{-8} \times \frac{25 \times 4}{25 - 4},$$

soit $\lambda_{5\to 2} = 4{,}33.10^{-7}$ m, ou 0,433 μm (longueur d'onde de la raie violette de l'hydrogène).

imprimerie bayeusaine
6 rue royale, 14401 bayeux
n° dépôt légal 3986 - 1er trimestre 1978
Imprimé en France



ISBN: 2-7117-3351-3